现代应用数学丛书

# 线性规划

〔日〕森口繁一　宫下藤太郎著

上海科学技术出版社

现代应用数学丛书

# 綫性規划

〔日〕森口繁一
宫下藤太郎 著

刘源張 譯
許国志 校

上海科学技术出版社

## 內容提要

本书是日本岩波书店出版的現代应用数学丛书之一的中譯本。以經济問題为例，介紹了有关綫性規划的理論和应用。全书分三章：第1章介紹单純形法的原理；第2章进一步討論修訂单純形法及对偶問題等；第3章着重介紹綫性規划的应用。

本书可供大学数学系、財經方面有关专业师生以及經济工作中的有关人員参考。


現代应用数学丛书

**綫性規划**

原书名 綫型計画法

原著者 〔日〕森口繁一 宮下藤太郎

原出版者 岩波书店

譯者 刘源張

校者 許国志

*

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路450号）

上海市书刊出版业营业許可証出093号

新华书店上海发行所发行　各地新华书店經售

商务印书館上海厂印刷

*

开本 850×1168 1/32　印張 2 16/32　字数 57,000

1963年4月第1版　1963年4月第1次印刷

印数 1—9,000

統一书号：13119·502

定价：（十四）0.40元

# 出版說明

这一套书是根据日本岩波书店出版的"現代应用数学讲座"翻譯而成。日文原书共15卷60册，分成A、B两組，各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并，整理成42种，不另分組編号，陆續翻譯出版。

这套书涉及的面很广，其內容都和現代科学技术密切有关，有一定参考价値。每一本书收集的資料都比較丰富，而叙述扼要，篇幅不多，有利于讀者以較短时間掌握有关学科的主要內容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情況，但其方法可供参考。因此，翻譯出版这一套书，对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陆續出版的，写作时間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对內容的处理，为了尽可能地減少这种影响，我們在每一譯本中，特請譯者或校閱者撰写序或后記，以介紹有关学科的最近发展状况，并对全书內容作一些評价，提出一些看法，結合我国情况补充一些資料文献，在文內过于簡略或不足的地方添加了必要的注释和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志，为提高书籍的质量付出了巨大劳动，在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

# 現代应用数学丛书

| 书名 | 原作者 | 譯者 |
|---|---|---|
| 代数学* | 弥永昌吉等 | 熊全淹 |
| 几何学* | 矢野健太郎 | 孙澤瀛 |
| 复变函数 | 功力金二郎 | 刘书琴 |
| 集合·拓扑·測度* | 河田敬义 | 賴英华 |
| 泛函分析* | 吉田耕作 | 程其襄 |
| 广义函数* | 岩村联 | 楊永芳 |
| 常微分方程* | 福原满洲雄 | 張庆芳 |
| 偏微分方程* | 南云道夫 | 錢端壮 |
| 特殊函数* | 小谷正雄等 | 錢端壮 |
| 差分方程* | 福田武雄 | 穆鴻基 |
| 富里哀变换与拉普拉斯变换* | 河田龙夫 | 錢端壮 |
| 变分法及其应用* | 加藤敏夫 | 周怀生 |
| 李群論* | 岩堀長庆 | 孙澤瀛 |
| 随机过程* | 伊藤清 | 刘璋温 |
| 回轉群与对称群的应用* | 山内恭彥等 | 張质賢 |
| 結晶統計与代数* | 伏見康治 | 孙澤瀛 |
| 偏微分方程的应用 | 犬井鉄郎等 | 楊永芳 |
| 微分方程的近似解法 | 加藤敏夫等 | 王占瀛 |
| 数值計算法 | 森口繁一等 | 閻昌齡 |
| 量子力学中的数学方法* | 朝永振一郎 | 周民彊 |
| 工程力学系統* | 近藤一夫等 | 刘亦珩 |
| 非綫性振动論* | 古屋茂 | 呂紹明 |
| 力学系与映射理論* | 岩田义一 | 孙澤瀛 |
| 平面彈性論* | 森口繁一 | 刘亦珩 |
| 有限变位彈性論·变形几何学 | 山本善之 近藤一夫 | 刘亦珩 |
| 塑性論* | 鷲津文一郎 | 刘亦珩 |
| 粘性流体理論* | 谷一郎 | 刘亦珩 |
| 可压縮流体理論* | 河村龙馬 | 刘亦珩 |
| 网絡理論 | 喜安善市等 | 賈弃晉 |
| 自动控制理論* | 喜安善市等 | 程立林 |
| 回路拓扑学 | 近藤一夫 | 張鳴鏞 |
| 信息論* | 喜安善市等 | 李文清 |
| 推断統計理論 | 北川敏男 | 李賢平 |
| 統計分析* | 森口繁一 | 刘璋温 |
| 試驗設計法 | 增山元三郎 | 刘璋温 |
| 群体遺傳学的数学理論* | 木村資生 | 刘祖洞 |
| 博奕論 | 宮澤光一 | 張毓春 |
| 綫性規划 | 森口繁一 | 刘源張 |
| 經济理論中的数学方法 | 安井琢磨等 | 談祥柏 |
| 随机过程的应用* | 河田龙夫 | 刘璋温 |
| 計算技术 | 高桥秀俊 | 姚晋 |
| 穿孔卡計算机 | 森口繁一 | 刘源張 |

注：有＊者已在1962年出版。

# 目　　录

# 第1章 单純形法

## §1 綫性規划問題与图解法

綫性規划(Linear Programming=LP)的典型問題可以写为下列的形式:

**标准型綫性規划問題** 在約束条件

$$\left.\begin{array}{l}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant s_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant s_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant s_m\end{array}\right\}\tag{1.1}$$

与
$$x_1\geqslant 0,\quad x_2\geqslant 0,\quad \cdots,\quad x_n\geqslant 0\tag{1.2}$$

下,决定使

$$f(x_1,\cdots,x_n)=v_1x_1+v_2x_2+\cdots+v_nx_n\tag{1.3}$$

为最大的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

这里 (1.1) 中的系数 $a_{ij}$ $(i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n)$,右边的 $s_i$ $(i=1,\cdots,m)$ 与 (1.3) 中的系数 $v_j$ $(j=1,\cdots,n)$ 都是給定的常数,并且 $a_{ij}$, $v_j$ 可以是任意的实数,但 $s_i$ 必須是正的。

**例 1**❶ 某一企业要制造两种产品 $A$, $B$. 制造1公斤的产品 $A$ 需要煤炭 9 吨,电力 4 瓩小时,劳动量 3 人日。制造1公斤的产品 $B$ 需要煤炭 4 吨,电力 5 瓩小时,劳动量 10 人日。但是这个企业能够使用的只有煤炭 360 吨,电力 200 瓩小时,劳动量 300 人日,超过这些就不能用。产品 $A$ 每1公斤有 7 万元的利潤,产品 $B$ 每1公斤有 12 万元的利潤。在上述对于煤炭、电力、劳力的限制下,希

---

❶ 这是資本主义制度下的情况。在社会主义制度下,首先应該根据国家計划来考虑生产的品种及其产量。后面也有类似情况。——譯者注

望在使利潤最大的情况下决定产品 $A$ 与产品 $B$ 的产量。

問題中所給的数值可以整理成表 1.1.

表1.1 数 据

| 资源 \ 活动 | 产品 $A$ 的生产（公斤） | 产品 $B$ 的生产（公斤） | 各种資源的利用限度 |
|---|---|---|---|
| 煤炭(吨) | 9 | 4 | 360 |
| 电力(瓩小时) | 4 | 5 | 200 |
| 劳动量(人日) | 3 | 10 | 300 |
| 利潤(万元) | 7 | 12 | — |

产品 $A$, $B$ 的产量分别設为 $x_1$ 公斤，$x_2$ 公斤，則約束条件可表示为

$$\left.\begin{array}{l} 9x_1+\ 4x_2\leqslant 360, \\ 4x_1+\ 5x_2\leqslant 200, \\ 3x_1+10x_2\leqslant 300 \end{array}\right\} \tag{1.4}$$

与

$$x_1\geqslant 0, \quad x_2\geqslant 0; \tag{1.5}$$

利潤的式子成为

$$f(x_1, x_2)=7x_1+12x_2. \tag{1.6}$$

因此，这个問題就是上面所述形式的問題。

[注] 一般以号碼 $i$ 与資源，号碼 $j$ 与活动相对应。$a_{ij}$ 可以解釋为技术系数，$s_i$ 为資源的利用限度，$v_j$ 为价値系数。函数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 称为目标函数。

現在，如例 1 这样簡单的問題可以用图解法方便地处理(图 1.1)。

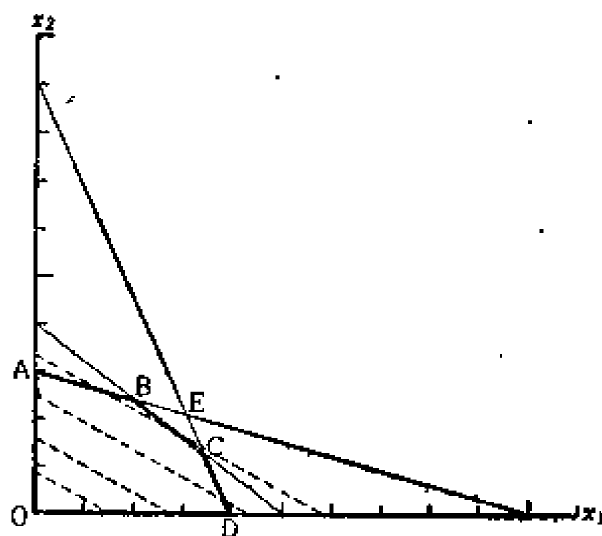



图 1.1 图 解 法

在$(x_1, x_2)$平面上，条件(1.4)的各式，指定点$(x_1, x_2)$各属于由某些直綫为界的半平面內。条件(1.5)要求点$(x_1, x_2)$应在第一象限內。滿足全部这些条件的点的集合是5边形$OABCD$的周边上和內部的全体点的集合。另一方面，以$C$为参数的曲綫群$f(x_1, x_2)=C$是平行直綫群，$C$愈大直綫愈在右上方(图1.1的虛綫)。只須在属于这个直綫群，并且与5边形$OABCD$至少共有1点的諸直綫內定出$C$的值是最大的那一条。在方格紙上作图一看就容易知道它是通过$B$点的直綫(对应的$C$是428)。$B$点是直綫$4x_1+5x_2=200$与$3x_1+10x_2=300$的交点，可知$x_1=20$，$x_2=24$。所以，这个問題的最优解定为产品$A$的产量$x_1=20$公斤，产品$B$的产量$x_2=24$公斤，这时所得的利潤是$f(20, 24)=428$万元。

一般說，在$n$維空間的点$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$中，滿足条件(1.1)与(1.2)的点的全体，組成一个由$m+n$个超平面(其中，后面的$n$个是坐标超平面)为界的$m+n$个半空間的共同部分所决定的凸集$S$。(連結那样两点的綫段上的任意一点，滿足所有的条件，因而属于这个集合，由此可知是凸集。)另一方面，$f(x_1, \cdots, x_n)=C$的曲綫群是平行超平面群。問題就是在属于这个群，而又与上述的凸集至少共有1点的諸超平面內，决定$C$值是最大的那一个(以及它与$S$的共同点)。

实际上，能够利用这样的作图，几何地求最优解的，只限于例1那样$n=2$的情况。当$n\geqslant 3$时就必須通过計算来求最优解。即使如此，象上面的解釋在对問題的性质和解法的考察上也是有效的。

另外，在这里引进新的变数，而把問題改写一下。

**例2** 在例1中，設煤炭、电力、劳力的使用剩余各为$\lambda_1$吨，$\lambda_2$瓩小时，$\lambda_3$人日，則

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1&=360-9x_1-4x_2,\\ \lambda_2&=200-4x_1-5x_2,\\ \lambda_3&=300-3x_1-10x_2.\end{aligned}\right\}\qquad(1.7)$$

这些都不允許是負的，即必然是

$$\lambda_1 \geqslant 0, \quad \lambda_2 \geqslant 0, \quad \lambda_3 \geqslant 0. \tag{1.8}$$

这样就把不等式(1.4)改写成等式(1.7)和簡单形式的不等式(1.8)。

若在(1.7)中把含有未知数的各項移至左边,并且因为(1.8)与(1.5)是同样形式,故把它們放在一起,则例1就可改为下面的形式:

在約束条件

$$\left.\begin{aligned} 9x_1+\ \ 4x_2+\lambda_1&=360, \\ 4x_1+\ \ 5x_2+\lambda_2&=200, \\ 3x_1+10x_2+\lambda_3&=300 \end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

与

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad \lambda_1 \geqslant 0, \quad \lambda_2 \geqslant 0, \quad \lambda_3 \geqslant 0 \tag{1.10}$$

下,决定使

$$f(x_1, x_2) = 7x_1 + 12x_2 \tag{1.11}$$

为最大的 $x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$。

松弛变数(slack variables) $\lambda_i (i=1, \cdots, m)$ 一般定义为

$$\lambda_i = s_i - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \cdots - a_{in}x_n \quad (i=1, \cdots, m), \tag{1.12}$$

则本节开始所举的問題可改为:在約束条件

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n + \lambda_i = s_i \quad (i=1, \cdots, m) \tag{1.13}$$

与

$$x_j \geqslant 0 \quad (j=1, \cdots, n), \quad \lambda_i \geqslant 0 \quad (i=1, \cdots, m) \tag{1.14}$$

下,决定使

$$f(x_1, \cdots, x_n) = v_1x_1 + \cdots + v_nx_n \tag{1.15}$$

为最大的 $x_1, \cdots, x_n, \lambda_1, \cdots, \lambda_m$。

## §2 代数解法

将尽量用普通代数的想法来說明用单純形法解前节例2的过程(更初等的解說見文献[10])。

**第1段** 首先考虑图1.1中对应原点 $O$ 的規划,即 $x_1=x_2=0$ 的規划。这时,$\lambda_1=360$, $\lambda_2=200$, $\lambda_3=300$。就是說,产品 $A$ 和产品 $B$ 全不生产,因此所有的資源全部剩下。利潤是 $f(0, 0)=0$。

这个规划不用說是可以改善的。从 (1.11) 可以看出，使 $x_1$ 取正数或使 $x_2$ 取正数都增加利潤 $f$. 若只取其中之一，则因为 $x_2$ 的系数較大，我們就取 $x_2$，即使 $x_1$ 仍然为 0，考虑使 $x_2$ 取正数的修正。

作这样的修正时，不能随便使 $x_2$ 增大。在 (1.7) 中使 $x_1=0$，逐漸增大 $x_2$，则 $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ 都逐漸变小。到 $x_2=300/10=30$ 时，$\lambda_3$ 就变成 0 ($\lambda_1$, $\lambda_2$ 还是正的)。$x_2$ 不允許比这再大。因此，作为修正案，得到

$$x_1=0, \quad x_2=30,$$
$$\lambda_1=360-4\times30=240, \quad \lambda_2=200-5\times30=50, \quad \lambda_3=0 \tag{2.1}$$

的规划(图 1.1 的 $A$ 点)。与此相对应的利潤是

$$f(0,\ 30)=12\times30=360. \tag{2.2}$$

**第 2 段** 为了考查(2.1)是否还能改善，从方程(1.9)导出与此等价的下列方程式：

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1+7.8x_1-0.4\lambda_3&=240,\\ \lambda_2+2.5x_1-0.5\lambda_3&=\ 50,\\ x_2+0.3x_1+0.1\lambda_3&=\ 30.\end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

这只須先以 10 除(1.9)的第 3 式，得(2.3)的第 3 式，再从(1.9)的第 1 式与第 2 式中各减去它的 4 倍与 5 倍。再将 (2.3) 的第 3 式的 12 倍加到 (1.11) 的两边，移項整理得

$$f=360+3.4x_1-1.2\lambda_3 \tag{2.4}$$

在前段得到的无非是在(2.3)，(2.4)中使 $x_1=\lambda_3=0$ 的规划。若要对此修正，就是将 $x_1$ 或 $\lambda_3$ 向正的方向移动。但是根据(2.4)知道，移动 $\lambda_3$ 反倒不上算。使 $x_1$ 为正的修正是上算的。这样，可以使 $x_1$ 增加到什么地方呢？这只要在(2.3)中使 $\lambda_3=0$，看使 $x_1$ 逐漸增大时变成什么样子就行。这时，$\lambda_1$, $\lambda_2$, $x_2$ 都逐漸减小，到 $x_1=50/2.5=20$ 时，$\lambda_2$ 最后成为 0. 其它的两个成为 $\lambda_1=240-7.8\times20=84$, $x_2=30-0.3\times20=24$. 利潤成为

$$f=360+3.4\times20=428. \tag{2.5}$$

这样就得到新的规划(图 1.1 的 $B$ 点)

$$x_1=20, \quad x_2=24, \quad \lambda_1=84, \quad \lambda_2=\lambda_3=0. \tag{2.6}$$

**第 3 段** 为了考查规划(2.6)是否还能改善，从方程(2.3)导出与此等价的下列方程：

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1-3.12\lambda_2+1.16\lambda_3&=84,\\ x_1+0.40\lambda_2-0.20\lambda_3&=20,\\ x_2-0.12\lambda_2+0.16\lambda_3&=24.\end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

这只須先以 2.5 除(2.3)的第2式,得出(2.7)的第2式,再从(2.3)的第1式和第3式各减去它的 7.8 倍。再将(2.7)的第2式的 3.4 倍加到(2.4)的两边,移項整理得

$$f=428-1.36\lambda_2-0.52\lambda_3. \tag{2.8}$$

規划(2.6)和与此相对应的利潤(2.5)无非是在(2.7)和(2.8)中使 $\lambda_2=\lambda_3=0$ 的規划和利潤。若要对此修正,就应使 $\lambda_2$ 或 $\lambda_3$ 成正的,但从(2.8)知道任何一方都不利(使 $\lambda_2$ 和 $\lambda_3$ 都成正的修正当然不利)。

这样就証实了規划(2.6)(图 1.1 的 $B$ 点)是最优。

**在上面的解法里,从方程(1.9)导出(2.3),再計算出(2.7),以及从(1.11)得(2.4),再求(2.8)的計算,利用表 2.1 来进行是很方便的。**

表2.1 单純形表

| 段 | | | $j\to$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $v_j\to$ | 0 | 7 | 12 | 0 | 0 | 0 | | |
| | $i$ | $v_i$ | 变数 | $s$ | $x_1$ | $x_2$ | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $\lambda_3$ | 計 | $\theta_i$ |
| 1 | 3 | 0 | $\lambda_1$ | 360 | 9 | 4 | 1 | 0 | 0 | 374 | 360/4=90 |
| | 4 | 0 | $\lambda_2$ | 200 | 4 | 5 | 0 | 1 | 0 | 210 | 200/5=40 |
| | 5 | 0 | $\lambda_3$ | 300 | 3 | 10 | 0 | 0 | 1 | 314 | 300/10=30 → |
| | | | $z_j-v_j$ | 0 | −7 | −12 | 0 | 0 | 0 | −19 | |
| 2 | 3 | 0 | $\lambda_1$ | 240 | 7.8 | 0 | 1 | 0 | −0.4 | 248.4 | 240/7.8=30.8 |
| | 4 | 0 | $\lambda_2$ | 50 | 2.5 | 0 | 0 | 1 | −0.5 | 53.0 | 50/2.5=20 → |
| | 2 | 12 | $x_2$ | 30 | 0.3 | 1 | 0 | 0 | 0.1 | 31.4 | 30/0.3=100 |
| | | | $z_j-v_j$ | 360 | −3.4 | 0 | 0 | 0 | 1.2 | 357.8 | |
| 3 | 3 | 0 | $\lambda_1$ | 84 | 0 | 0 | 1 | −3.12 | 1.16 | 83.04 | |
| | 1 | 7 | $x_1$ | 20 | 1 | 0 | 0 | 0.40 | −0.20 | 21.20 | |
| | 2 | 12 | $x_2$ | 24 | 0 | 1 | 0 | −0.12 | 0.16 | 25.04 | |
| | | | $z_j-v_j$ | 428 | 0 | 0 | 0 | 1.36 | 0.52 | 429.88 | ◎ |

在表 2.1 里,上边有 $v_j$,左边有 $v_i$ 栏,还在右边有計和 $\theta_i$ 栏,此外有 $z_j-v_j$ 的注記 ◎ 的記号等。这些意思将在下节的説明中

搞清楚。

表 2.1 本体部分的計算是綫性計算(各行作为一个向量处理的計算)的一种，称为迭代法(参照本丛书，森口、高田：数值計算法❶ I, §1)。它的“樞軸件”是在表 2.1 里以用虛綫包括的行和列的交点指示出来。

## §3 单純形法的原理

現在将前节所述的代数解法的要点概括成一般的形式。

作为准备，为了形式的整理，将原来的变数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 和松弛变数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 一概用下列同类的記号

$$\left.\begin{array}{ll} y_1=x_1, \cdots, & y_n=x_n, \\ y_{n+1}=\lambda_1, \cdots, & y_{n+m}=\lambda_m \end{array}\right\} \tag{3.1}$$

表示。并且与此相随，将新的价值系数 $v_{n+1}, \cdots, v_{n+m}$ 都定为 0。这样，(1.13)，(1.14)，(1.15) 各成为

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j+y_{n+i}=s_i \quad (i=1, \cdots, m), \tag{3.2}$$

$$y_j \geqslant 0 \quad (j=1, \cdots, n+m), \tag{3.3}$$

$$f=\sum_{j=1}^{n+m} v_j y_j. \tag{3.4}$$

从而可以說，問題是：在条件 (3.2)，(3.3) 下使 (3.4) 最大。

**例 1** 对于上面的例子，就是

$$y_1=x_1, \quad y_2=x_2, \quad y_3=\lambda_1, \quad y_4=\lambda_2, \quad y_5=\lambda_3, \tag{3.5}$$

$$v_1=7, \quad v_2=12, \quad v_3=0, \quad v_4=0, \quad v_5=0, \tag{3.6}$$

$$[a_{ij}]=\begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 5 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}. \tag{3.7}$$

单純形法是从 (3.2) 出发，依次进行“迭代”的計算。这样得到

❶ 即本丛书中，關昌龄譯《数值計算法》。——譯者注

的(与原来等价的)方程一般可写作如下的形式:

$$y_i+\sum_{k\in K} b_{ik}y_k=b_{i0}\quad (i\in B),\tag{3.8}$$

此处 $B$ 和 $K$ 都是号碼的集合。$B$ 含有 $m$ 个，$K$ 含有 $n$ 个，彼此沒有共同的号碼，双方相加恰是 $\{1, 2, \cdots, n+m\}$，即

$$B+K=\{1, 2, \cdots, n+m\}.\tag{3.9}$$

**例2**　参照記号(3.5)；在(2.3)就是

$$B=\{3, 4, 2\},\quad K=\{1, 5\},$$

在(2.7)就是

$$B=\{3, 1, 2\},\quad K=\{4, 5\}.$$

[注]　(3.8)可以說是对(3.2)中具有属于 $B$ 的号碼的变数 $y_i(i\in B)$ 求解所得的。就是說(3.8)是将特定的 $m$ 个变数 $y_i(i\in B)$ 以其余的 $n$ 个变数 $y_k(k\in K)$ 表示的式子。

除(3.8)中所含 $b_{i0}$，$b_{ik}$ 之外，当 $i=j$ 时将 $b_{ij}(i, j\in B)$ 定为1，当 $i\neq j$ 时定为0，則(3.8)也可写为

$$\sum_{j=1}^{n+m} b_{ij}y_j=b_{i0}\quad (i\in B).\tag{3.10}$$

(3.10)的系数的行列記入在单純形表的本体部分里。(属于 $B$ 的号碼的列是单位向量，唯一不是0的分量1可在具有对应的号碼的变数的行里找到。)

[注]　$m$ 个变数 $y_i(i\in B)$ 称为表中的"基底变数(basic variables)"。

将前节的計算程序作成一般的框图(flow chart)，如图3.1。

現在，一般地稍微詳細考查一下这个程序的各个步驟。

从考查一个給出的表所表示的規划开始。(作为具体的例子，請参照表2.1的第2段或第3段。)就图3.1，从②开始說起。

一般說，一个表是如上面說过的表示(3.8)那样的一組方程，这里特别使 $y_k=0(k\in K)$，則得 $y_i=b_{i0}(i\in B)$。若

$$b_{i0}\geqslant 0\quad (i\in B),\tag{3.11}$$

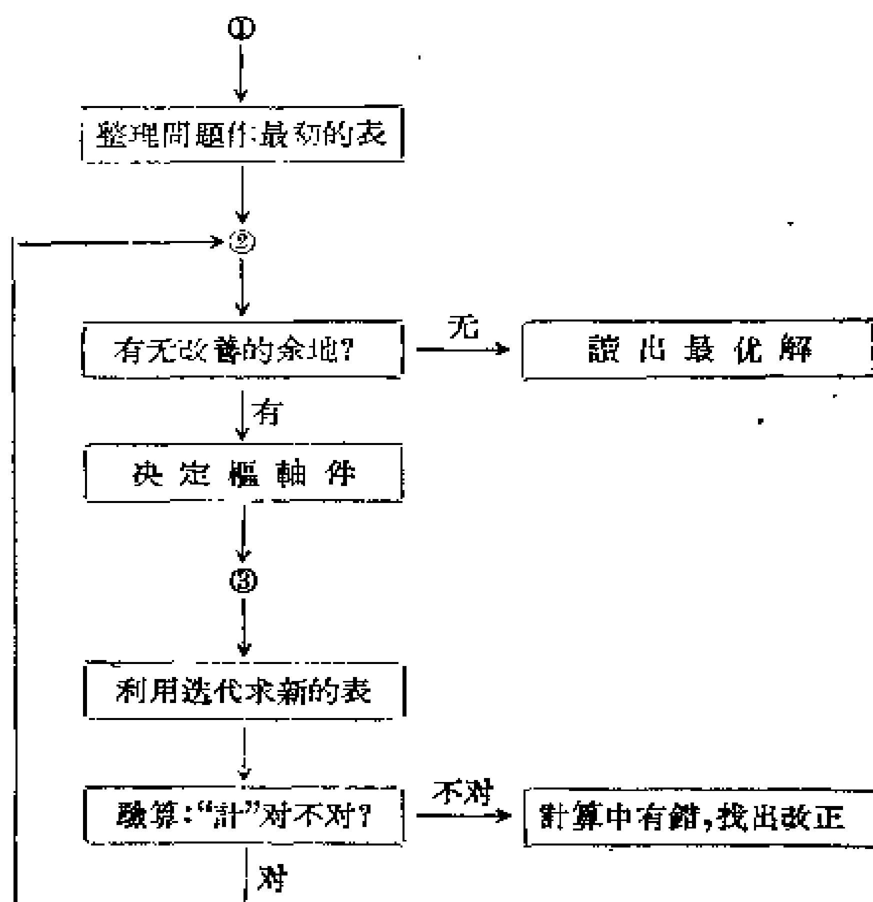



图3.1 单純形計算的一般程序

这便是确实可以容許的——可能实行的(feasible)——規划。为了簡单起見,条件(3.11)成立的表称为**S型**(取 simplex 的头一个字母)。S型的表表示一个可行解

$$y_i=b_{i0}\quad(i\in B),\quad y_k=0\quad(k\in K),\tag{3.12}$$

这就称为那个表的"基底解(basic solution)"。

为了考查基底解(3.12)是否有改善的余地,必須求得将利潤表示为 $y_k(k\in K)$ 的函数的式子。这只須在(3.4)右边的 $y_j$ 当中,对基底变数 $y_i(i\in B)$ 代入从(3.8)求得的式子,对其他的变数 $y_k(k\in B)$ 仍然不动,加以整理就行。这样就成为

$$\begin{aligned}f&=\sum_{i\in B}v_i\Big(b_{i0}-\sum_{k\in K}b_{ik}y_k\Big)+\sum_{k\in K}v_ky_k\\&=\sum_{i\in B}v_ib_{i0}-\sum_{k\in K}\Big(\sum_{i\in B}v_ib_{ik}-v_k\Big)y_k.\end{aligned}\tag{3.13}$$

一般定义

$$z_j=\sum_{i\in B} v_i b_{ij} \quad (j=0, 1, \cdots, m+n), \tag{3.14}$$

則(3.13)可写为

$$f=z_0-\sum_{k\in K}(z_k-v_k)y_k. \tag{3.15}$$

对于基底解(3.12)的利潤等于 $z_0$. [因为对于 $i$, $j\in B$ 的 $b_{ij}$ 只在 $i=j$ 时是1, 其他时是0, 所以 $z_j=v_j(j\in B)$. 因此, $j\in B$ 时的 $z_j-v_j$ 一定是0. 若再定义 $v_0=0$, 則 $z_0-v_0$ 与 $z_0$ 相同。]

在基底解(3.12)中, 所有的 $y_k(k\in K)$ 都作为0. 对于它的修正案是以使 $y_k(k\in K)$ 当中一个以上成为正的形式出現。至于它是否有利,决定于(3.15)中的系数 $(z_k-v_k)$ 的符号。若

$$z_k-v_k\geqslant 0 \quad (\text{对所有的 } k\in K), \tag{3.16}$$

則利潤不会超过 $z_0$ (根据(3.3), $y_k$ 决不会是負的)。就是說基底解(3.12)是最优。

[注] 若对所有的 $k\in K$, $z_k-v_k>0$, 最优規划只有(3.12). 这是因为在其他的規划中, $y_k(k\in K)$ 当中有一个以上是正的, 利潤就一定比 $z_0$ 小的原故。

若(3.16)成立, 对某一 $k\in K$, $z_k-v_k=0$, 进行使对应的 $y_k$ 成为正的修正,利潤也不会发生变化。在这种情況,也存在(3.12)以外的最优解。

假若判別条件(3.16)不成立, 即对某一个 $k\in K$, $z_k-v_k<0$, 則进行使对应的 $y_k$ 成为正的修正,利潤将較 $z_0$ 为大。就是說規划(3.11)还有改善的余地。对于这时的改善方法再来加以詳細的考查。

記使 $z_k-v_k<0$ 这样的一个 $k$ 为 $k^*$. [当有許多这样的 $k$ 的时候, 使其中的任何一个为 $k^*$, 都能得到改善。普通将其中使 $|z_k-v_k|$ 最大的——負得最多的(most negative)——記为 $k^*$.]若对于 $k^*$ 以外的 $k\in K$, 仍使 $y_k=0$ 而只使 $y_{k^*}$ 成为正的(其値写作 $\theta$), 則修正案从(3.8)成为

$$\left.\begin{aligned} y_i &= b_{i0} - b_{ik^*}\theta \quad (i \in B), \\ y_{k^*} &= \theta, \\ y_k &= 0 \quad (k \neq k^*,\ k \in K). \end{aligned}\right\} \tag{3.17}$$

而且，对于它，目标函数是

$$f = z_0 - (z_{k^*} - v_{k^*})\theta. \tag{3.18}$$

因为在(3.18)中，$z_{k^*} - v_{k^*} < 0$，所以 $\theta$ 愈大則 $f$ 愈大，从这一点說最好尽量使 $\theta$ 取大値。但是，一般 $\theta$ 不能随便增大。因为若增大了 $\theta$ 而使(3.17)变成不能容許的就不行了。就是說，在(3.17)滿足条件(3.3)的范圍內可以使 $\theta$ 增大。(3.17)第一式最初的 $m$ 个可能为負。不过，其中 $b_{ik^*} \leqslant 0$ 的不会成負的（$\theta$ 增大，$y_i$ 也不会減小，所以不用担心它成为負的）。因此，只有对 $i \in B$，$b_{ik^*} > 0$ 的才要担心。在 $\theta$ 等于

$$\theta_i = b_{i0}/b_{ik^*} \tag{3.19}$$

的时候，那个 $y_i$ 成为 0。$\theta$ 超过 $\theta_i$，則 $y_i$ 成为負的，(3.17)成为不能容許的規划。因此，$\theta$ 一定要小于 $\theta_i$。对于 $b_{ik^*} > 0$ 的所有的 $i \in B$，若 $\theta \leqslant \theta_i$，則(3.17)給出可以容許的規划。在这样的限制下，若要尽量使 $\theta$ 取大値，可以取等于諸 $\theta_i$ 中的最小値，

$$\theta = \min\{b_{i0}/b_{ik^*}:\ i \in B,\ b_{ik^*} > 0\}. \tag{3.20}$$

**例 3** 表 2.1 的第 2 段中，只是对于 $k=1$（$y_1$ 即 $x_1$ 的列），$z_k - v_k < 0$，这样，使 $k^* = 1$（这一列在表 2.1 中，夹在虛綫里面）。这时，$B = \{3, 4, 2\}$，因为 $b_{ik^*}$ 都是正的，計算得

$$\left.\begin{aligned} \theta_3 &= b_{30}/b_{31} = 240/7.8 = 30.8, \\ \theta_4 &= b_{40}/b_{41} = 50/2.5 = 20, \\ \theta_2 &= b_{20}/b_{21} = 30/0.3 = 100. \end{aligned}\right\}$$

取其最小値 $\theta_4 = 20$（在表 2.1 中，这个計算記在右方的边上。$y_1$（即 $x_1$）在修正案中使为 20）。

［注］ 若在 $i \in B$ 当中，沒有 $b_{ik^*} > 0$ 的 $i$，即对所有的 $i \in B$ 都有 $b_{ik^*} \leqslant 0$，則 $\theta$ 可为任意大，随之 $f$ 可任意增大。这时解是“无限大”。

由(3.20)所定的 $\theta$ 应等于某一个 $\theta_i$ (記为 $\theta_{i^*}$) ❶。这样，对应它的变数 $y_{i^*}$ 在修正案中成为 0 (因 $y_{i^*}=b_{i^*0}-b_{i^*k^*}\theta$)。因此，从基底变数 $y_i(i\in B)$ 当中，$y_{i^*}$ 出去，$y_{k^*}$ 进来。对集合 $B$ 和 $K$ 說，在修正案中与这些对应的新的集合 $B'$ 和 $K'$ 就是

$$\left.\begin{aligned} B'&=B-\{i^*\}+\{k^*\},\\ K'&=K+\{i^*\}-\{k^*\}. \end{aligned}\right\} \tag{3.21}$$

这样决定樞軸件 $b_{i^*k^*}$，就到达了图 3.1 的③。

从③开始的运算是以元素 $b_{i^*k^*}$ 为樞軸 (pivot) 的迭代 (sweep out) 計算。由此，$k^*$ 的列变为单位向量(原来的 $i^*$ 的行的元素現在成为 1，并且那一行新指定为 $k^*$ 的行)。另一方面，过去是单位向量的 $i^*$ 列現在不是了。

**例 4** 在表 2.1 中，从第 2 段轉移到第 3 段的計算，是以第 2 段中的 $b_{41}=2.5$ ($\lambda_2$ 的行，$x_1$ 的列的元素)为樞軸的迭代。

[注] 在表 2.1 的第 2 段中，$\lambda_2$ 的行和 $x_1$ 的列是用虛綫夹在里面的。一般在表里将 $i^*$ 的行 $k^*$ 的列用虛綫(实际計算时用鉛笔綫)夹起来会很方便。

将迭代的計算写为一般的形式，新表的元素記为 $b'_{ij}$，则成

$$b'_{k^*j}=b_{i^*j}/b_{i^*k^*} \qquad (j=0,\ 1,\ \cdots,\ m+n,\text{計}), \tag{3.22}$$

$$b'_{ij}=b_{ij}-b_{ik^*}b'_{k^*j} \quad (i\in B-\{i^*\};\ j=0,\ 1,\ \cdots,\ m+n,\text{計}). \tag{3.23}$$

再者，关于(3.15)中的系数 $(z_j-v_j)$ $(j=0,\ \cdots,\ m+n)$ 也不用由(3.14)一个一个計算，随迭代同时，对新表的值 $(z_j-v_j)'$ 可以計算如

$$(z_j-v_j)'=(z_j-v_j)-(z_{k^*}-v_{k^*})b'_{k^*j} \quad (j=0,\ \cdots,\ m+n,\ \text{計}). \tag{3.24}$$

(这和(3.23)完全是相同的形式，因此，当作表中多加 $z_j-v_j\equiv b_{0j}$

---

❶ 在 $\theta=\theta_i$ 的 $i$ 有两个以上的时候发生退化。这时，普通以其中的任一个作 $i^*$ 都行，但是在特别的情况下不行。关于这一点請参照本节末的补注。

的一行，而对于 $i=0$ (3.23) 也成立，进行处理就可以。)

[(3.24)的証明]

$$\begin{aligned}右边 &= \Big(\sum_{i\in B} v_i b_{ij} - v_j\Big) - \Big(\sum_{i\in B} v_i b_{ik^*} - v_{k^*}\Big) b'_{k^*j} \\ &= \sum_{i\in B} v_i (b_{ij} - b_{ik^*} b'_{k^*j}) + v_{k^*} b'_{k^*j} - v_j \\ &= \sum_{i\in B-\{i^*\}} v_i b'_{ij} + v_{k^*} b'_{k^*j} - v_j \\ &= \sum_{i\in B'} v_i b'_{ij} - v_j = z'_j - v_j \\ &= (z_j - v_j)'.\end{aligned}$$

証毕

当迭代計算完成后，可以利用行計进行驗算。对于新表(在舍入誤差的范圍內)看

$$b_{i計} = b_{i0} + b_{i1} + \cdots + b_{i,n+m} \quad (i\in B \text{ 和 } i=0) \tag{3.25}$$

是否成立。(容易証明对这一个表若成立，同样的关系对下一个表也成立。) 驗算結束后，回到新的表②。

[注] 上面所說的利用行計的驗算是綫性計算的常識。手算或机械計算中都最好进行这种驗算。此外，也可利用列計进行驗算。为此添加新的一行 $b_{\cdot j}$ $(j=0, \cdots, n+m)$ ($b_{0j}$ 是 $z_j - v_j$) 如下：

$$\sum_{i\in B} b_{ij} + b_{0j} + b_{\cdot j} = 1 \quad (j=0, 1, \cdots, n+m). \tag{3.26}$$

并且同 $b_{0j}$ 一样在 $b_{\cdot j}$ 也适用与(3.23)同样的形式

$$b'_{\cdot j} = b_{\cdot j} - b_{\cdot k^*} b'_{k^*j}. \tag{3.27}$$

这样，用(3.22)，(3.23)，(3.24)和(3.27)計算新表的列的合計是

$$\begin{aligned}&\sum_{i\in B'} b'_{ij} + b'_{0j} + b'_{\cdot j} \\ &= \sum_{i\in B-\{i^*\}} (b_{ij} - b_{ik^*} b'_{k^*j}) + b'_{k^*j} \\ &\qquad + (b_{0j} - b_{0k^*} b'_{k^*j}) + (b_{\cdot j} - b_{\cdot k^*} b'_{k^*j}) \\ &= \Big\{\sum_{i\in B-\{i^*\}} b_{ij} + b_{0j} + b_{\cdot j}\Big\} + b'_{k^*j}\Big\{-\sum_{i\in B-\{i^*\}} b_{ik^*} + 1 - b_{0k^*} - b_{\cdot k^*}\Big\} \\ &= (1 - b_{i^*j}) + b'_{k^*j}(b_{i^*k^*}) = 1.\end{aligned}$$

用数值来看是否如此就是驗算。

以上就作完了单純形法的一个輪回。将此較图 3.1 更詳細描繪出来如图 3.2。

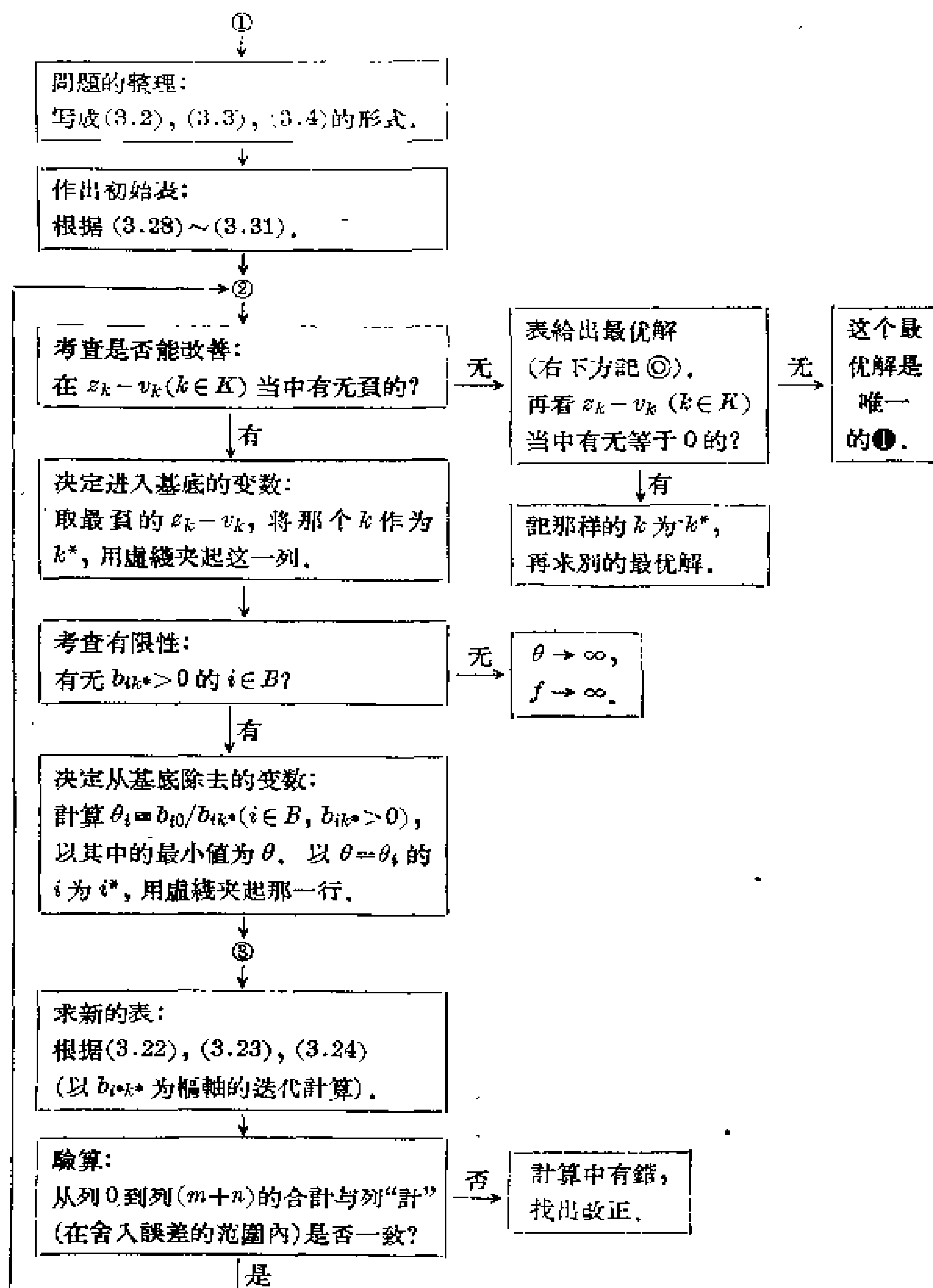



图 3.2　更詳細的单純形計算的程序

---

❶　然而, $b_{i0}(i\in B)$ 当中若有是0的,則另有别的作为最优基底解。

还沒有說明的是从①到②，即最初的表是怎样作的。那只要是 $S$ 型的表就都可以，但一般是将問題整理成(3.2)，(3.3)，(3.4)的形式，再如下面所說作出初始表(参照后面的表 5.1)：

$$B=\{n+1, \cdots, n+m\}, \tag{3.28}$$

$$\left.\begin{aligned} b_{ij}&=s_{i-n} && (i\in B,\ j=0),\\ &=a_{i-n,j} && (i\in B,\ j=1, \cdots, n),\\ &=\delta_{ij} && (i\in B,\ j=n+1, \cdots, n+m), \end{aligned}\right\} \tag{3.29}$$

$$b_{i\text{計}}=b_{i0}+b_{i1}+\cdots+b_{i,n+m}. \tag{3.30}$$

下边添上

$$b_{0j}\equiv z_j-v_j=\sum_{i\in B} v_i b_{ij}-v_j \quad (j=0, 1, \cdots, n+m) \tag{3.31}$$

的計算(这里設 $v_0=0$)。

这就到达②，因而可以开始上面的輪回。

由于不同的情况，若利用对于类似問題的最优表制作初始表，則有时可能快些。

**补注** 創造单純形法的是 G. B. Dantzig (文献[1]，第 XXI 章)。想出現在这里說明的形式的表的，根据 Charnes (文献[3]，第 66 頁) 所說，是 A. Orden, G. B. Dantzig 和 A. J. Hoffman。

单純形法是继續从基底解到基底解的旅行(就图 1.1 說，从頂点走到頂点)，最后达到最优解的方法。为在理論上保証这种作法的正确，还有必要作以下的說明。

第1，滿足条件的点 $(x_1, \cdots, x_n)$ 的集合 $S$ (§1) 是凸集，特别，若它有界，就是凸(超)多面体。并且因目标函数 $f$ 是綫性，一般可說，若它的最大値是有限的，它发生在 $S$ 的一个极点(頂点)上，或者是在作为几个极点的綫性組合(系数是非負的)所得的一个单純形上。在单純形法里所謂基底解不外是集合 $S$ 的极点，因此，所求的最优解若是唯一，它是一个基底解，所以与最优基底解一致。若最优解有几个，則最优基底解也有两个以上，那就可以从求出全部的最优基底解作非負系数的綫性組合而得到所有的最优解。因为是这样，所以我們就可以把檢查的范圍只限在基底解上。

第2，图 3.2 的程序一定可以开始，明显地，只要同样的基底不会再出

現，一定在有限回完了(因基底最多不过有 ${}_{n+m}C_m$ 个)。因为目标函数 $f$ 的值普通是随每一段根据(3.18)增加，我們逐漸进到有利的基底，不会倒退到不利的基底。只是若(3.18)中的 $\theta$ 为 0，則下一段中的 $f$ 就停留在現有的值上。若发生这种事，可能在有相同的 $f$ 值的几个基底解之間轉来轉去永不完了。在实际的計算中，如使用高速自动計算机，可以将每段的 $f$ 值(即 $z_0$) 和基底变数的出入印刷出来加以监視，因而若发生这种事就很容易知道(根据經驗，那样的"巡回"好象不大会发生)。只是，作为理論上的保証(例如，利用最优表的存在想要証明什么的时候)，有必要考虑防止那样的巡回。

A. Charnes (文献[3])用"擾动法"解决了这个問題❶。即认为 $\theta=0$ 的发生是一种"退化 (degeneracy)"。为了防止它，用任意小的正数 $\varepsilon$，考虑以

$$s_i+\varepsilon^i \quad (i=1, \cdots, m) \tag{3.32}$$

置换 $s_i$ 的問題，对此使其进行图 3.2 的程序❷。这样，象从后面的(5.1)所知道的那样，任意表中 $s$ 的列都置换成

$$[本来的\ s\ 列]+\varepsilon Q_1+\varepsilon^2 Q_2+\cdots+\varepsilon^m Q_m. \tag{3.33}$$

(3.33)的，相当于变数 $y_i (i\in B)$ 的行的分量是

$$b_{i0}+\varepsilon b_{i,n+1}+\varepsilon^2 b_{i,n+2}+\cdots+\varepsilon^m b_{i,n+m}. \tag{3.34}$$

这决不是 0。即使 $b_{i0}$ 是 0，$b_{ij} (j=n+1, \cdots, n+m)$ 之中必有不是 0 的。[这是因为图 3.2 中的迭代是乘上一个正規矩陣，从单位矩陣出发将此反复进行的結果所得的矩陣 $Q$ (它的各列是 $Q_1, \cdots, Q_m$) 是正規的原故。] 所以，对于这个变形的問題，$\theta=0$ (退化)不会发生。对于它的 $f$ 值

$$f=z_0+\varepsilon z_{n+1}+\varepsilon^2 z_{n+2}+\cdots+\varepsilon^m z_{n+m}, \tag{3.35}$$

严密地說只有增加的一方面。这样就可以防止巡回。在这种作法时，对于(3.20)的 $\theta$，只要将 $b_{i0}$ 置换为 $b_{i0}+\varepsilon b_{i,n+1}+\cdots+\varepsilon^m b_{i,n+m}$ 考虑，則 $\theta=\theta_i$ 的 $i$ 是唯一的(若不是这样，下一段中出現是 0 的(3.34)，而与上述矛盾)。以此为 $i^*$。

最后，在最优表中若 $z_k-v_k (k\in K)$ 当中有等于 0 的，則就存在有两个以上最优基底解。此外，若最終表中发生退化，$b_{i0} (i\in B)$ 当中有是 0 的，将此看为微小的負值，利用对偶法(§6)可以求出另外的最优基底解。在这种情况

❶ 后来 Dantzig 等将此换成代数的語言。[G. B. Dantzig, A. Orden, and P. Wolfe: Notes on Linear Programming, Part 1. The Generalized Simplex Method, RAND paper, 1954].

❷ 本节从此以后的部分，在初学时可暂不讀，等看完 §5 后再讀。

下，为了提高进行求出所有存在的最优基底解的計算的效率，将最优基底解全体看成一个“迷路”，可以应用“图的理論”中的迷路探驗的原則——“走尽所有的可能性，再回到原来的路上”[根据 Charnes (文献[3]，第69～70頁)]。但在实际問題中不会成为那么复杂的迷路。

## §4 罰款 $M$ 的利用

在前节討論的标准型的問題里，約束条件都是(1.1)形式的不等式，并且它右边的 $s_i (i=1, \cdots, m)$ 都作为正的来处理的。

但是，在实际問題里，有时約束条件是作为等式

$$a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n=s_i \tag{4.1}$$

或方向相反的不等式

$$a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n\geqslant s_i \quad (s_i>0) \tag{4.2}$$

出現。本节就叙述这种情况的处理方法。

先討論混有(4.1)形式的等式的情况。若导入与到現在有着同样意义的“使用剩余”的松弛变数 $\lambda_i$

$$a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n+\lambda_i=s_i, \tag{4.3}$$

則条件(4.1)可改写为 $\lambda_i=0$. 过去可以是 $\lambda_i\geqslant0$，現在必須是 $\lambda_i=0$.

这里，将問題少許变一下，姑先容許有正的 $\lambda_i$. 但是作为变换，如果 $\lambda_i$ 是正的，則利潤会变得非常小的話，又怎么样呢？这就要采取“吓破胆那样的罰款”去禁止正的 $\lambda_i$. 这样一来，条件式还可照旧象(1.13)，(1.14)，但对利潤的式子(1.15)要加上 $-M\lambda_i$ 形式的項。这个 $M\lambda_i$ 表示“吓破胆那样的罰款”的金額。$\lambda_i$ 若是0，这一項是0. 而且設想不管怎样小，$\lambda_i$ 若取正値，由于这一項的影响，利潤成为大的不得了的負値。这样作就可以将問題改成标准型的。

**例1** 在§1例1中，假設只是要求煤炭的360吨全部用完。如此問題就是：在約束条件 $9x_1+4x_2=360$，$4x_1+5x_2\leqslant200$，$3x_1+10x_2\leqslant300$ 和 $x_1\geqslant0$，$x_2\geqslant0$ 下使 $f=7x_1+12x_2$ 最大。

导入松弛变数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$，将問題改写，就成为：在約束条件 $9x_1+4x_2+\lambda_1=360$，$4x_1+5x_2+\lambda_2=200$，$3x_1+10x_2+\lambda_3=300$ 和 $x_1\geqslant0$，$x_2\geqslant0$，$\lambda_1\geqslant0$，$\lambda_2\geqslant0$，$\lambda_3\geqslant0$ 下使 $f=7x_1+12x_2-M\lambda_1$ 最大。这里 $M$ 設为非常大的正数。单純形表成为表 4.1 的样子。

表 4.1 有等式的例子

| 段 | | $v_j\to$ | 0 | 7 | 12 | $-M$ | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $v_i$ | 变数 | $s$ | $x_1$ | $x_2$ | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $\lambda_3$ | $\theta_i$ |
| 1 | $-M$ | $\lambda_1$ | 360 | 9 | 4 | 1 | 0 | 0 | 40 |
| | 0 | $\lambda_2$ | 200 | 4 | 5 | 0 | 1 | 0 | 50 → |
| | 0 | $\lambda_3$ | 300 | 3 | 10 | 0 | 0 | 1 | 100 |
| | | $z_j-v_j$ | $-360M$ | $-9M-7$ | $-4M-12$ | 0 | 0 | 0 | |
| 2 | 7 | $x_1$ | 40 | 1 | 4/9 | 1/9 | 0 | 0 | 90 |
| | 0 | $\lambda_2$ | 40 | 0 | 29/9 | $-4/9$ | 1 | 0 | 12.4 |
| | 0 | $\lambda_2$ | 180 | 0 | 78/9 | $-3/9$ | 0 | 1 | 20.8 → |
| | | $z_j-v_j$ | 280 | 0 | $-80/9$ | $M+7/9$ | 0 | 0 | |
| 3 | 7 | $x_1$ | 1000/29 | 1 | 0 | 5/29 | $-4/29$ | 0 | |
| | 12 | $x_2$ | 360/29 | 0 | 1 | $-4/29$ | 9/29 | 0 | |
| | 0 | $\lambda_2$ | 2100/29 | 0 | 0 | 25/29 | $-78/29$ | 1 | |
| | | $z_j-v_j$ | 11320/29 | 0 | 0 | $M-13/29$ | 80/29 | 0 | ◎ |

最优规划是 $x_1=1000/29=34.48$ 公斤，$x_2=360/29=12.41$ 公斤，$\lambda_1=\lambda_2=0$，$\lambda_3=2100/29=72.41$ 人日，利潤是 $f=11320/29=390.34$ 万元（相当于图 1.1 的 $C$ 点）。

再来叙述混有 (4.2) 形式的不等式情况的处理方法。在这个情况下导入表示“使用过度”的松弛变数 $\mu_i$

$$a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n-\mu_i=s_i, \tag{4.4}$$

条件 (4.2) 成为 $\mu_i\geqslant0$。

这样，問題的条件好象一时变成 (1.13)，(1.14) 的形式，但实际上这还不能开始单純形的解法。因为当将松弛变数全部取作基底变数的时候，在 (4.4) 中使 $x_1=\cdots=x_n=0$ 所得的值 $\mu_i=-s_i$ 不

满足条件 $\mu_i \geqslant 0$（参照§7的末尾）。

此时也导入形式上的資源 $i$ 的使用剩余 $\lambda_i$

$$a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n+\lambda_i-\mu_i=s_i, \tag{4.5}$$

同时，在利潤的式子上加入 $-M\lambda_i$ 的一項，若 $\lambda_i$ 是正的，則被征收“吓破胆那样”的罰款。这样，問題就回到标准型上。

**例 2** 在§1例1中，設只是要求电力使用200瓩小时以上。如此問題就是：在約束条件 $9x_1+4x_2 \leqslant 360$，$4x_1+5x_2 \geqslant 200$，$3x_1+10x_2 \leqslant 300$ 和 $x_1 \geqslant 0$，$x_2 \geqslant 0$ 下，使 $f=7x_1+12x_2$ 最大。

表 4.2 有反方向不等式的例子

| 段 | $v_i$ | $v_j\to$ / 变数 | 0<br>$s$ | 7<br>$x_1$ | 12<br>$x_2$ | 0<br>$\lambda_1$ | $-M$<br>$\lambda_2$ | 0<br>$\lambda_3$ | 0<br>$\mu_2$ | $\theta_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | $\lambda_1$ | 360 | 9 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 90 |
| | $-M$ | $\lambda_2$ | 200 | 4 | 5 | 0 | 1 | 0 | $-1$ | 40 |
| | 0 | $\lambda_3$ | 300 | 3 | 10 | 0 | 0 | 1 | 0 | 30→ |
| | | $z_j-v_j$ | $-200M$ | $-4M$<br>$-7$ | $-5M$<br>$-12$ | 0 | 0 | 0 | $M$ | |
| 2 | 0 | $\lambda_1$ | 240 | 7.8 | 0 | 1 | 0 | $-0.4$ | 0 | 30.8 |
| | $-M$ | $\lambda_2$ | 50 | 2.5 | 0 | 0 | 1 | $-0.5$ | $-1$ | 20→ |
| | 12 | $x_2$ | 30 | 0.3 | 1 | 0 | 0 | 0.1 | 0 | 100 |
| | | $z_j-v_j$ | $-50M$<br>$+360$ | $-2.5M$<br>$-3.4$ | 0 | 0 | 0 | $0.5M$<br>$+1.2$ | $M$ | |
| 3 | 0 | $\lambda_1$ | 84 | 0 | 0 | 1 | $-3.12$ | 1.16 | 3.12 | 26.9→ |
| | 7 | $x_1$ | 20 | 1 | 0 | 0 | 0.4 | $-0.2$ | $-0.4$ | — |
| | 12 | $x_2$ | 24 | 0 | 1 | 0 | $-0.12$ | 0.16 | 0.12 | 200 |
| | | $z_j-v_j$ | 428 | 0 | 0 | 0 | $M$<br>$+1.36$ | 0.52 | $-1.36$ | |
| 4 | 0 | $\mu_2$ | 26.923 | 0 | 0 | 0.32051 | $-1$ | 0.37180 | 1 | |
| | 7 | $x_1$ | 30.769 | 1 | 0 | 0.12820 | 0 | $-0.05128$ | 0 | |
| | 12 | $x_2$ | 20.769 | 0 | 1 | $-0.03846$ | 0 | 0.11538 | 0 | |
| | | $z_j-v_j$ | 464.615 | 0 | 0 | 0.43589 | $M$ | 1.02565 | 0 | ◎ |

引进使用剩余 $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ 和使用过度 $\mu_2$，改写問題，就成为：在約束条件 $9x_1+4x_2+\lambda_1=360$, $4x_1+5x_2+\lambda_2-\mu_2=200$, $3x_1+10x_2+\lambda_3=300$ 和 $x_1\geqslant 0$, $x_2\geqslant 0$, $\lambda_1\geqslant 0$, $\lambda_2\geqslant 0$, $\lambda_3\geqslant 0$, $\mu_2\geqslant 0$ 下，使 $f=7x_1+12x_2-M\lambda_2$ 最大。这里 $M$ 設为非常大的正数。单純形表成为表 4.2 的样子。

最优规划是 $x_1=30.769$, $x_2=20.769$, $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$, $\mu_2=26.923$, 利潤是 $f=464.615$（相当于图 1.1 的 $E$ 点）。

**如上面所說，在条件中混有等式或反方向的不等式的情况，可以利用罰款处理。但是在这个 $M$ 留在 $z_0$ 之中的时候，那个表所表示的規划是不可能实现的（被征收罰款）。因此，虽然尽管 $(z_k-v_k)$ $(k\in K)$ 当中沒有負的，单純形計算完了，如果发生了 $z_0$ 当中还有 $M$ 的事情，这就意味条件过苛而沒有解（沒有同时满足給定的条件的解）。**

表 4.3　不可行情况的例子

| 段 | $v_i$ | $v_j\to$ 变数 | 0<br>$s$ | 7<br>$x_1$ | 12<br>$x_2$ | 0<br>$\lambda_1$ | $-M$<br>$\lambda_2$ | 0<br>$\lambda_3$ | 0<br>$\mu_2$ | $\theta_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | $\lambda_1$ | 360 | 9 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 90 |
| | $-M$ | $\lambda_2$ | 400 | 4 | 5 | 0 | 1 | 0 | $-1$ | 80 |
| | 0 | $\lambda_3$ | 300 | 3 | 10 | 0 | 0 | 1 | 0 | 30 → |
| | | $z_j-v_j$ | $-400M$ | $-4M$<br>$-7$ | $-5M$<br>$-12$ | 0 | 0 | 0 | $M$ | |
| 2 | 0 | $\lambda_1$ | 240 | 7.8 | 0 | 1 | 0 | $-0.4$ | 0 | 30.8 → |
| | $-M$ | $\lambda_2$ | 250 | 2.5 | 0 | 0 | 1 | $-0.5$ | $-1$ | 100 |
| | 12 | $x_2$ | 30 | 0.3 | 1 | 0 | 0 | 0.1 | 0 | 100 |
| | | $z_j-v_j$ | $-250M$<br>$+360$ | $-2.5M$<br>$-3.4$ | 0 | 0 | 0 | $0.5M$<br>$+1.2$ | $M$ | |
| 3 | 7 | $x_1$ | 30.8 | 1 | 0 | 0.128 | 0 | $-0.051$ | 0 | |
| | $-M$ | $\lambda_3$ | 173.0 | 0 | 0 | $-0.320$ | 1 | $-0.372$ | $-1$ | |
| | 12 | $x_2$ | 20.8 | 0 | 1 | $-0.384$ | 0 | 0.053 | 0 | |
| | | $z_j-v_j$ | $-173M$<br>$+465$ | 0 | 0 | $0.320M$<br>$+0.435$ | 0 | $0.372M$<br>$+0.68$ | $M$ | ◎ |

**例 3**　在約束条件：$9x_1+4x_2\leqslant 360$，$4x_1+5x_2\geqslant 400$，$3x_1+10x_2\leqslant 300$ 和 $x_1\geqslant 0$，$x_2\geqslant 0$ 下，使 $f=7x_1+12x_2$ 最大。

这个情况与例 2 同样，引进使用剩余 $\lambda_1$，$\lambda_2$，$\lambda_3$ 和使用过度 $u_2$ 进行单純形計算，成为表 4.3 的样子。

在表中的第 3 段，$z_j-v_j$ $(j=1,\cdots,6)$ 都 $\geqslant 0$。所以尽管这就是最終的表，但 $z_0=-173M+465$ 还是处在被罰款的状态。就是說，确定了不管怎样努力也免不了罰款(讀者可以划图看一看)。

# 第2章 綫性关系的保存性

## §5 修訂单純形法

单純形法的創始者 G. B. Dantzig 后来提出了一个修訂方案 [G. B. Dantzig: Notes on Linear Programming, Part III: Computational Algorithm of the Revised Simplex Method, RM-1266, RAND Corporation, 1953]。为了理解它的用意，看一看对于单純形一般成立的綫性規划的保存性将是有帮助的。

对一个矩陣进行迭代的計算时，列与列之間成立的綫性关系是被保存下来的（参閱本丛书，森口、高田：数值計算法 I，§1）。因此，在单純形表上，在最初的表中成立的綫性关系，在其后导出的所有的表中也都成立。这一点的应用很广。

現在，若对在 §1 的开头所举的問題作初始表，就象表 5.1 那样（参照 §3 的末尾）。

表5.1 初 始 表

| 段 | | $v_j \to$ | 0 | $v_1 \quad \cdots \quad v_n$ | $0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $v_i$ | 变 数 | $s$ | $x_1 \quad \cdots \quad x_n$ | $\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_m$ | 計 |
| 1 | 0 | $\lambda_1$ | $s_1$ | $a_{11} \quad \cdots \quad a_{1n}$ | $1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0$ | $\cdots$ |
| | 0 | $\lambda_2$ | $s_2$ | $a_{21} \quad \cdots \quad a_{2n}$ | $0 \quad 1 \quad \cdots \quad 0$ | $\cdots$ |
| | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots \quad \quad \vdots$ | $\vdots \quad \vdots \quad \quad \vdots$ | $\vdots$ |
| | 0 | $\lambda_m$ | $s_m$ | $a_{m1} \quad \cdots \quad a_{mn}$ | $0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1$ | $\cdots$ |
| | | $z_j - v_j$ | 0 | $-v_1 \quad \cdots \quad -v_n$ | $0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0$ | $\cdots$ |

表中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 的列一般称为 $Q_1, \cdots, Q_m$. 在表 5.1 中引人注目的是这些列都是基本单位向量。因此，其他的任何列都可以表示为 $Q_1, \cdots, Q_m$ 的綫性組合，其中的系数是列中的各个分量。

例如，

$$[s\ 列]=s_1Q_1+\cdots+s_mQ_m, \tag{5.1}$$

$$[x_j\ 列]=a_{1j}Q_1+\cdots+a_{mj}Q_m\quad(j=1,\ \cdots,\ n). \tag{5.2}$$

这样，由于上面提到的保存性，这些关系被保存下来，而对所有的表都是成立的。

**例 1** 表 2.1 中，因为在第 1 段

$$[s\ 列]=360[\lambda_1\ 列]+200[\lambda_2\ 列]+300[\lambda_3\ 列]$$

成立，所以在第 3 段

$$\begin{bmatrix}84\\20\\24\end{bmatrix}=360\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+200\begin{bmatrix}-3.12\\0.40\\-0.12\end{bmatrix}+300\begin{bmatrix}1.16\\-0.20\\0.16\end{bmatrix}$$

也成立(这很容易驗証)。

**例 2** 在表 2.1 的第 1 段中，显然是

$$[x_1\ 列]=9[\lambda_1\ 列]+4[\lambda_2\ 列]+3[\lambda_3 列],$$

同样的关系，在第 3 段中

$$\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=9\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}-3.12\\0.40\\-0.12\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}1.16\\-0.20\\0.16\end{bmatrix}$$

也是成立的。

而且更对于由 (3.14) 定义的 $z_j$，显然同样的关系也是成立的。

**例 3** 表 2.1 中 $z_0=360\ z_1+200\ z_2+300\ z_3$ 即 $428=360\times0+200\times1.36+300\times0.52$ 成立(注意有关系的 $v_j$ 都是 0)。并且 $x_1$ 列的 $z_j-v_j$ 可以作为

$$9z_1+4z_2+3z_3-7=(9\times0+4\times1.36+3\times0.52)-7=0$$

計算。

对应某一个表中基底变数的初始表的列向量称为“基底向量”。把这些排起来所作的矩陣称之为“基底矩陣”。在那个表中对应松弛变数 $\lambda_i(i=1,\ \cdots,\ m)$ 的列所作的矩陣 $Q=[b_{ij};\ i\in B,$

$j=n+1, \cdots, n+m$] 是基底矩陣的逆矩陣。証明可以从下面的例子显然看出。

**例 4** 在表 2.1 的第 3 段中，基底変数是 $\lambda_1$, $x_1$, $x_2$. 因此，基底矩陣是

$$\begin{bmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 10 \end{bmatrix}.$$

另一方面，表中第 3 段，对应 $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ 的列所作的矩陣是

$$Q=\begin{bmatrix} 1 & -3.12 & 1.16 \\ 0 & 0.40 & -0.20 \\ 0 & -0.12 & 0.16 \end{bmatrix},$$

为了看出这是基底矩陣的逆矩陣，只須同例 2 一样导出下式的关系：

$$Q\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Q\begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Q\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(上面的第 2 式就是例 2 本身)。

有了以上的准备，現在来說明修訂单純形法。将其步驟示于图 5.1.

此法的特征在于，对单純形表中所有的，只計算上面所說的逆矩陣的那一部分，即 $z_j-v_j$ 的行，以及第 $k^*$ 列，其他的都不計算。

对应 $\lambda_i(i=1, \cdots, m)$ 的 $z_j(j=n+i)$ 是与普通的单純形法同样計算(第 2 段以后用迭代法)，其他的 $z_j(j=0, 1, \cdots, n)$ 以

$$z_0=\sum_{i=1}^{m} z_{n+i}s_i, \tag{5.3}$$

$$z_j=\sum_{i=1}^{m} z_{n+i}a_{ij} \quad (j=1, \cdots, n) \tag{5.4}$$

計算(参照例 3)。由此求出判别准則 (criterion) $z_j-v_j$，选其中"最負"的，决定号碼 $k^*$ (如果沒有負的 $z_j-v_j$，就是得到了最优表)。

若 $k^*\leqslant n$，則第 $k^*$ 列可从逆矩陣 $Q$ 的各列 $Q_i(i=1, \cdots, m)$

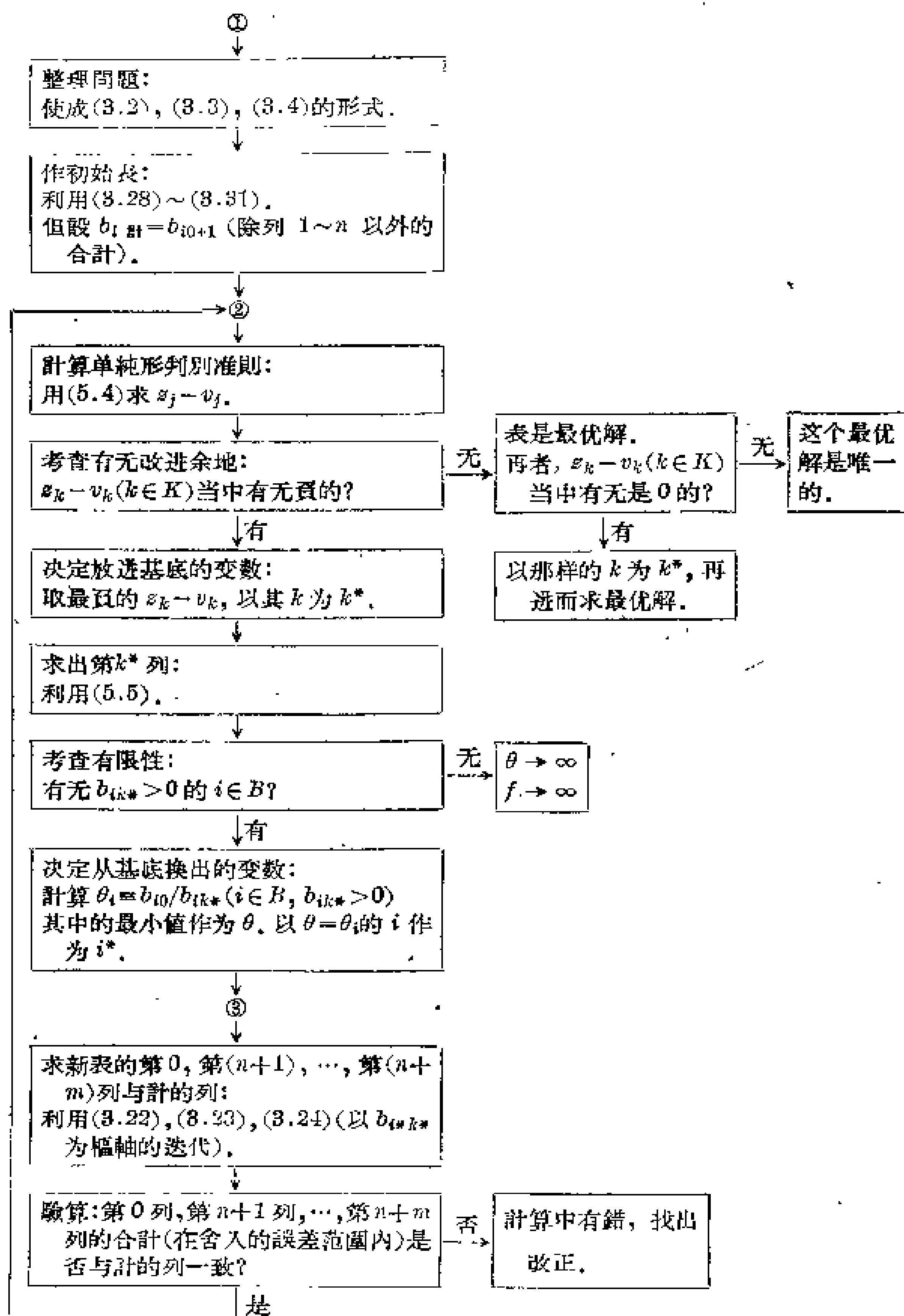

①
整理問題:
使成(3.2),(3.3),(3.4)的形式.
作初始表:
利用(3.28)~(3.31).
但設 $b_{i\,計}=b_{i0+1}$ (除列 1~n 以外的合計).
②
計算单純形判別准則:
用(5.4)求 $z_j-v_j$.
考查有无改进余地:
$z_k-v_k(k\in K)$当中有无負的?
无
表是最优解.
再者, $z_k-v_k(k\in K)$ 当中有无是0的?
无
这个最优解是唯一的.
有
以那样的 $k$ 为 $k^*$, 再进而求最优解.
有
决定放进基底的变数:
取最負的 $z_k-v_k$, 以其 $k$ 为 $k^*$.
求出第$k^*$列:
利用(5.5).
考查有限性:
有无 $b_{ik^*}>0$ 的 $i\in B$?
无
$\theta\to\infty$
$f\to\infty$
有
决定从基底换出的变数:
計算 $\theta_i=b_{i0}/b_{ik^*}(i\in B,\ b_{ik^*}>0)$
其中的最小値作为 $\theta$. 以 $\theta=\theta_i$的 $i$ 作为 $i^*$.
③
求新表的第0,第(n+1),…,第(n+m)列与計的列:
利用(3.22),(3.23),(3.24)(以 $b_{i^*k^*}$ 为樞軸的迭代).
驗算:第0列,第n+1列,…,第n+m列的合計(在舍入的誤差范圍内)是否与計的列一致?
否
計算中有錯, 找出改正.
是

图5.1 修訂单純形法

以

$$[第\ k^*\ 列]=\sum_{i=1}^{m} Q_i a_{ik^*} \tag{5.5}$$

求出(参照(5.2))。若 $k^*>n$，則第 $k^*$ 列就是 $Q_{k^*-n}$，所以不必要特別計算。这样，第 $k^*$ 列一出来，以后用与普通的单純形法同样的方式，决定换出的变数的号碼 $i^*$，再用以 $b_{i^*j^*}$ 为樞軸的迭代計算；求出下一个表的 $s$ 的列与 $\lambda_1$，…，$\lambda_m$ 的列。这就完成了一次輪回。

根据这个方法，迭代的計算只須对 $(m+1)$ 行 $(m+1)$ 列的矩陣进行(为此約需 $m^2$ 次的乘算)。普通的单純形法中須对 $(m+1)$ 行 $(m+n+1)$ 列的矩陣作迭代[为此所需的乘算約 $m(m+n)$ 次]。只从这一点看，或許以为修訂单純形法比普通的单純形法要簡便的多。但是，实际上計算量的节約一般說并不那样显著。

第1，虽說在普通的单純形法中大約需要 $m(m+n)$ 次乘算，但实际上其中有相当多的并不用計算。就是說，与基底变数对应的列显然是单位向量，因而不必要特別計算。如果将它省去，1段的迭代中必需的乘算大約是 $mn$ 次。当然，同理，对修訂单純形法的迭代也如此。因此，实际上必要的計算除了 $s$ 的列以外，只是对应于在松弛变数当中从基底出来的那些列。一般說这个数目随段数增加而增大。在某一段，若进入基底的松弛变数有 $p$ 个，为求这一段的逆矩陣的迭代中所需的乘算大約是 $mp$ 次。

第2，在普通的单純形法中，$z_j-v_j$ 是全部用迭代法求出，所以不用另外計算。但在修訂单純形法中，对于 $j=1$，…，$n$ 的 $z_j-v_j$，要用(5.4)計算。因此，另外需要 $mn$ 次的乘算。不过，其中对应于进入基底的变数的那些，不必要計算。这样的变数只有 $p$ 个(从基底换出的松弛变数的个数)。所以，实际上必要的乘算次数大約是 $m(n-p)$ 次。

在修訂单純形法中，对于第1段来說，实质上必要的乘算在迭代上大約是 $mp$ 次，在判別准則 $z_j-v_j$ 上大約是 $m(n-p)$ 次，加在一起大約是 $mn$ 次。与在普通的单純形法的第1段中所要的乘算次数(只是迭代)一致。这样，实质上必要的乘算次数在两者之間几乎沒有差別。

然而，在技术系数 $a_{ij}(i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n)$ 当中有許多是0的情况(矩陣$[a_{ij}]$是稀松(sparse)的情况)，如用一种与0相乘的計算比普通的乘

算容易进行的計算手段(例如手算),則(5.4)的計算便很輕松,因而就可以节省很多。除了这一点,修訂单純形法同普通的单純形法的优劣,因为与所用的計算手段,特別是程序設計和記忆装置有关,不能一概而言。再者,也想出有这样一种方法:不是对逆矩陣本身,而是只把每次迭代所需的乘数 $b_{ik*}/b_{i*k*}(i\in B-\{i^*\}+\{0\})$ 及 $1/b_{i*k*}$ (全部总共 $m+1$ 个) 記忆下来,必要时用乘积的形式替代逆矩陣进行計算 [G. B. Dantzig and W. Orchard-Hays: Notes on Linear Programming, Part V, Alternative Algorithm for the Revised Simplex Method Using a Product Form for the Inverse, RAND Corp., 1953]. 据說这种方法适合于象 IBM 701 那样的高速計算机。

在运輸問題(§8)中,表本体部分的元素限于 1 或 0 或 $-1$. 因此,以乘算次数为指标的討論就不确切了。实际上,作为运輸問題的实用解法,如所周知的 MODI 法的本质可以說就是修訂单純形法。

**补注** 在本节中提到的綫性关系的保存性,可以有一个几何学的解釋。就是,单純形表的各列各自看作 $m$ 維向量空間的向量,在它們之間成立如 (5.1) 与 (5.2) 的关系。一般說,若記对应变数 $y_j$ 的向量为 $P_j(j=1, \cdots, n+m)$, 对应 $S$ 列的向量为 $P_0$, 則解都須滿足 $\sum_{j=1}^{n+m} y_jP_j=P_0$ (在初始表中,就是(3.2)). 特别是,对于任何一个基底解 (3.12), 有

$$\sum_{i\in B} b_{i0}P_i=P_0 \tag{5.6}$$

成立。并且,在与此对应的表中容易认出有

$$\sum_{i\in B} b_{ij}P_i=P_j \quad (j=0, 1, \cdots, n+m) \tag{5.7}$$

成立。这可以看作为 $P_i(i\in B)$ 是上述向量空間的一个"基底 (basis)", (5.7) 是用这个基底所作的向量 $P_j(j=0, 1, \cdots, n+m)$ 的表示。从一个表到另一个表的轉換是向量空間中的基底的变换。就是說,将在(5.7)中 $j=k^*$ 变成下列的形式:

$$b_{i*k*}P_{i*}+\sum_{i\in B-\{i^*\}} b_{ik*}P_i=P_{k*}. \tag{5.8}$$

对 $P_{i*}$ 求解,得

$$P_{i*}=\frac{1}{b_{i*k*}}P_{k*}-\sum_{i\in B-\{i^*\}} \frac{b_{ik*}}{b_{i*k*}}P_i. \tag{5.9}$$

将此代入对于一般的 $j$ 的(5.7)式左边,得

$$b_{i^*j}\left(\frac{1}{b_{i^*k^*}}P_{k^*}-\sum_{i\in B-\{i^*\}}\frac{b_{ik^*}}{b_{i^*k^*}}P_i\right)+\sum_{i\in B-\{i^*\}}b_{ij}P_i=P_j, \tag{5.10}$$

即

$$\frac{b_{i^*j}}{b_{i^*k^*}}P_{k^*}+\sum_{i\in B-\{i^*\}}\left(b_{ij}-\frac{b_{i^*j}b_{ik^*}}{b_{i^*k^*}}\right)P_i=P_j. \tag{5.11}$$

这是利用新的基底 $P_i(i\in B-\{i^*\}+\{k^*\})$ 对向量 $P_j$ 的表示。从此也可理解(3.22),(3.23).

再者，单純形法这一名詞的由来好象在文献中沒有明显的記載。想是从基底向量形成单純形一事而来。

## §6 对偶問題

一般說，对于一个綫性規划問題，一定存在与此互为表里关系的另一个綫性規划問題。而且，用单純形法对其中的一个求解，则在最后表中的 $z_j-v_j$ 栏内出现另一个問題的解。这就是說，这一对問題有互为对偶的关系。

如果表的問題为：在約束条件

$$\left.\begin{array}{l}a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant s_1,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant s_m\end{array}\right\} \tag{6.1}$$

与

$$x_1\geqslant 0,\ \cdots,\ x_n\geqslant 0 \tag{6.2}$$

下，使

$$f=v_1x_1+\cdots+v_nx_n \tag{6.3}$$

最大，則里的問題就是：在約束条件

$$\left.\begin{array}{l}u_1a_{11}+\cdots+u_ma_{m1}\geqslant v_1,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\ u_1a_{1n}+\cdots+u_ma_{mn}\geqslant v_n\end{array}\right\} \tag{6.4}$$

与

$$u_1\geqslant 0,\ \cdots,\ u_m\geqslant 0 \tag{6.5}$$

下，使

$$g=u_1s_1+\cdots+u_ms_m \tag{6.6}$$

最小。

在本节中，設 $a_{ij}$, $s_i$, $v_j$ 为任意給定的实数(正負皆可，在第1章里假定 $s_i>0$)。这样，在里的問題中对 (6.4) 和 (6.6) 同乘以 $-1$，就变成表的問題的形式。对于它再进行上述同样的变换，又作出它的里的問題，这实质上成为原来的表的問題。因此，对偶关系是互相的。

現在，設表的問題是标准型(就是所有的 $s_i>0$)，由此得到一組最优解 $x_j^*$ $(j=1, \cdots, n)$。另一方面，考虑滿足里的問題的条件 (6.4)，(6.5) 的任意的 $u_i(i=1, \cdots, m)$，则有

$$g=\sum_{i=1}^{m}u_is_i\geqslant\sum_{i=1}^{m}u_i\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j^*\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}u_ia_{ij}\right)x_j^*\geqslant\sum_{j=1}^{n}v_jx_j^*=f_{\max} \tag{6.7}$$

成立。就是說，对于滿足条件 (6.4)，(6.5) 的任意的 $u_i(i=1, \cdots, m)$，$g\geqslant f_{\max}$，因此，若其中有使 $g=f_{\max}$ 的 $u_i(i=1, \cdots, m)$，它就是里的問題的解。为此，(6.7) 中的 2 个 $\geqslant$ 都必須成为 $=$。也就是說，以那样的 $u_i$ 为 $u_i^*$，则对于它，在 (6.4)，(6.5) 以外，还必須有

$$若\quad \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j^*<s_i,\quad 则\ u_i^*=0, \tag{6.8}$$

$$若\quad x_j^*>0,\quad 则\ \sum_{i=1}^{m}u_i^*a_{ij}=v_j \tag{6.9}$$

成立。然而，在最优表中以 $\lambda_i$ 列的 $z_j-v_j(j=n+i)$ 各为 $u_i^*(i=1, \cdots, m)$，则对于这个 $u_i^*$ 正是成立上述的关系。

**証明** 因由定义 $v_j=0\ (j=n+1, \cdots, n+m)$，所以 $u_i^*=z_{n+i}\ (i=1, \cdots, m)$。因而从 (5.4)，得

$$z_j=\sum_{i=1}^{m}z_{n+i}a_{ij}=\sum_{i=1}^{m}u_i^*a_{ij}.$$

但因在最优表中 $z_j - v_j \geqslant 0$ $(j=1, \cdots, n+m)$，所以在最先的 $n$ 个当中 $\sum u_i a_{ij}^* \geqslant v_j$，以后的 $m$ 个当中 $u_i^* \geqslant 0$，即知 $u_i^*$ 滿足(6.4)，(6.5)。

再若 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* < s_i$，松弛变数 $\lambda_i$ 一定会进入基底，因此 $z_{n+i} - v_{n+i} = 0$，即 $u_i^* = 0$。再若 $x_j^* > 0$，則变数 $x_j$ 进入基底，所以 $z_j - v_j = 0$，即 $\sum_{i=1}^{m} u_i^* a_{ij} = v_j$。即 $u_i^*$ 滿足(6.8)，(6.9)。　　証毕

通过以上的討論，得出如下的定理：

**定理**　当表的問題是标准型时，若对于它得到最优表，則对应它的松弛变数的 $z_j - v_j$ 給出里的問題的解，并且 $g_{\min} = f_{\max} = z_0$。

**例1**　在約束条件：$3u_2 \geqslant 1$，$2u_1 + 4u_2 \geqslant 4$，$2u_1 + u_2 \geqslant 3$，$3u_1 \geqslant 3$，$4u_1 + 2u_2 \geqslant 4$，$u_1 + 2u_2 \geqslant 1$，与 $u_1 \geqslant 0$，$u_2 \geqslant 0$ 下，使 $g = 2u_1 + 2u_2$ 最小。

这个問題是前面的里的問題的形式。与此相对的表的問題是：在約束条件：

$$2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 + x_6 \leqslant 2,$$
$$3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_5 + 2x_6 \leqslant 2$$

与

$$x_1 \geqslant 0, \cdots, x_6 \geqslant 0$$

下，使

$$f = x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 4x_5 + x_6$$

最大。

对于这个問題的单純形表如表 6.1。

从表 6.1 中第 4 段知道，对于原来問題的最优解是 $u_1^* = 4/3$，$u_2^* = 1/3$，对此 $g = g_{\min} = 10/3$。

［注］　象这样条件的个数比变数的个数多，而且条件是反方向的不等式时，換作对偶問題处理是很方便的。

当表的問題不是标准型，而利用罰款归結为标准型时，同样的关系也成立（这时在对应于松弛变数的各个 $z_j - v_j$ 当中，除 $M$ 項以外的各項給出 $u_i^*$）。

若表的問題的条件中有等式，例如 $\sum a_{ij} x_j = s_i$，可将它换为一对不等式 $\sum a_{ij} x_j \geqslant s_i$ 与 $\sum a_{ij} x_j \leqslant s_i$。这与 $\sum(-a_{ij}) x_j \leqslant (-s_i)$ 和

表 6.1　对偶問題的例子

| 段 | $v_j\to$ <br> $v_i$ 变数 | 0 <br> $s$ | 1 <br> $x_1$ | 4 <br> $x_2$ | 3 <br> $x_3$ | 3 <br> $x_4$ | 4 <br> $x_5$ | 1 <br> $x_6$ | 0 <br> $\lambda_1$ | 0 <br> $\lambda_2$ | 計 | $\theta_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 $\lambda_1$ | 2 | 0 | 2 | 2 | 3 | 4 | 1 | 1 | 0 | 15 | 1 |
|  | 0 $\lambda_2$ | 2 | 3 | 4 | 1 | 0 | 2 | 2 | 0 | 1 | 15 | 1/2 → |
|  | $z_j-v_j$ | 0 | $-1$ | $-4$ | $-3$ | $-3$ | $-4$ | $-1$ | 0 | 0 | $-16$ |  |
| 2 | 0 $\lambda_1$ | 1 | $-3/2$ | 0 | 3/2 | 3 | 3 | 0 | 1 | $-1/2$ | 15/2 | 1/3 → |
|  | 4 $x_2$ | 1/2 | 3/4 | 1 | 1/4 | 0 | 1/2 | 1/2 | 0 | 1/4 | 15/4 | — |
|  | $z_j-v_j$ | 2 | 2 | 0 | $-2$ | $-3$ | $-2$ | 1 | 0 | 1 | $-1$ |  |
| 3 | 3 $x_4$ | 1/3 | $-1/2$ | 0 | 1/2 | 1 | 1 | 0 | 1/3 | $-1/6$ | 5/2 | 2/3 |
|  | 4 $x_2$ | 1/2 | 3/4 | 1 | 1/4 | 0 | 1/2 | 1/2 | 0 | 1/4 | 15/4 | → 2 |
|  | $z_j-v_j$ | 3 | 1/2 | 0 | $-1/2$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 1/2 | 13/2 |  |
| 4 | 3 $x_3$ | 2/3 | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 2 | 0 | 2/3 | $-1/3$ | 5 |  |
|  | 4 $x_2$ | 1/3 | 1 | 1 | 0 | $-1/2$ | 0 | 1/2 | $-1/6$ | 1/3 | 5/2 |  |
|  | $z_j-v_j$ | 10/3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 1 | 4/3 | 1/3 | 9 | ◎ |

$\sum a_{ij}x_j\leqslant s_i$ 等价。这样，在里的問題中，假設与它們对应的变数为 $u_{i-}$，$u_{i+}$，則在里的問題的条件里会出現如 $(u_{i+}-u_{i-})a_{ij}$ 的項，在目标函数 $g$ 里也会出現如 $(u_{i+}-u_{i-})s_i$ 形式的項。这就是說其中有 $u_i\equiv u_{i+}-u_{i-}$（不受正負限制的）变数。其逆亦眞。

当表的問題的解是无限大时，則里的問題无解（不存在滿足任何条件的 $u_i$）。当表的問題无解时，則里的問題的解或是无限大或无解。

里的問題的解 $u_i^*$ 对于表的問題有什么意义呢？它是与最优表中松弛变数 $\lambda_i$ 对应的 $z_j-v_j$。若 $\lambda_i$ 不在基底里面，則在最优規划中 $\lambda_i=0$，就是說資源 $i$ 是用尽了的，而且若作只增加 1 单位的 $\lambda_i$（只剩下 1 单位的資源 $i$）的修正，則利潤减少 $u_i^*$（参照 (3.14)）。假若对于資源 $i$ 的利用限度只減少了 1 单位，这与在現在的状态下只剩下 1 单位是同样的，因此，也就一定滿足于只減少 $u_i^*$ 的利

潤了。換句話說，資源 $i$ 的最后 1 单位对我們只有 $u_i^*$ 的价值。資源 $i$ 的"边际价值"就是 $u_i^*$. 这也称为影子价格 (shadow price)，轉嫁价格(imputed price)等。

根据这种解釋，重新看(6.8)，(6.9)就很有兴趣。(6.8)表示：在最优規划中可以剩下的資源的边际价值是 0；(6.9)意味着：对于在最优規划中实际进行的活动，利用各种資源的边际价值所計算的被消費的价值，与其产生的价值相等。

在这里再来說明一下所謂对偶法(dual method) (C. E. Lemke and A. Charnes: Extremal problems in linear inequalities, Carnegie Inst. of Tech., Dept. of Math., Tech. Rep. No. 36, 1953, 78 pp.). 这可以說是将里的問題的单純形計算当作对于表的問題的表来看的一种东西。但是实用上不如将它理解为下述的形式倒反方便。

現有某一表中，本体部分表示为

$$y_i+\sum_{k\in K} b_{ik}y_k=b_{i0} \quad (i\in B), \tag{6.10}$$

下边記入

$$z_j-v_j=b_{0j} \quad (j=0,\ 1,\ \cdots,\ n+m) \tag{6.11}$$

(参照 § 3). 但是，在 § 3 中假定 $b_{i0}\geqslant 0(i\in B)$，而在这里不作如此的限制，代之以 $b_{0k}\geqslant 0(k\in K)$的假定($b_{i0}(i\in B)$ 必然是 0)．为了簡单起見，称服从这个假定的表为 D 型 (取 dual 的头一个字母)。

在 D 型的表中，若同时 $b_{i0}\geqslant 0(i\in B)$，它就是最优表，因此沒有問題。当 D 型表 $b_{i0}(i\in B)$ 之中有負的情况，就有将它变形以达到最优表的問題。在这种变形中，与普通的单純形計算一样，利用迭代。只是这时的樞軸件 $b_{i^*k^*}$ 的选法不同。就是說，在图 3.1 中从 ② 到 ③ 之間的規則要作以下的变动：

(1) 从 $b_{i0}(i\in B)$ 中找出最大的負数，記其号碼为 $i^*$.

(2) 从 $b_{i^*k}(k\in K)$ 中挑出所有的负的，計算

$$\theta_k=-b_{0k}/b_{i^*k}. \tag{6.12}$$

(若所有的 $b_{i^*k}\geqslant 0\,(k\in K)$，对于 $i=i^*$(6.10)决不会成立，因此問題是不可能的。)

(3) 以 $\theta_k$ 中的最小值为 $\theta$，記 $\theta=\theta_k$ 的 $k$ 为 $k^*$，即使

$$\theta=\theta_{k^*}=\min(-b_{0k}/b_{i^*k}:k\in K,\ b_{i^*k}<0). \tag{6.13}$$

这样，到达了③.

以这样决定的元素 $b_{i^*k^*}$ 为樞軸，进行根据 (3.22)，(3.23)，(3.24)的迭代計算时，新的表还是 D 型。

**証明** 新表下边的 $b'_{0j}(j=1,\cdots,n+m)$用(3.24)，(3.22)計算为

$$b'_{0j}=b_{0j}-b_{0k^*}b'_{k^*j}=b_{0j}-\frac{b_{0k^*}b_{i^*j}}{b_{i^*k^*}}. \tag{6.14}$$

但因 $b_{i^*k^*}<0$，$b_{0k^*}>0$，所以若 $b_{i^*j}\geqslant 0$，則 $b'_{0j}\geqslant b_{0j}\geqslant 0$. 再若 $b_{i^*j}<0$ (因为这样的 $j$ 一定属于 $K$)，則

$$b'_{0j}=-b_{i^*j}(-b_{0j}/b_{i^*j}+b_{0k^*}/b_{i^*k^*})=(-b_{i^*j})\ (\theta_j-\theta_{k^*})\geqslant 0.$$

如此对于所有的 $j=1,\cdots,n+m$，$b'_{0j}\geqslant 0$，因此新的表也是 D 型。

新表的 $z_0$(即 $b_{00}$)与(6.14)同样是

$$z'_0=z_0-b_{i^*0}b_{0k^*}/b_{i^*k^*}=z_0+b_{i^*0}\theta, \tag{6.15}$$

因为 $b_{i^*0}<0$，$\theta>0$ ($\theta=0$ 即所謂退化情况的討論省略)，所以 $z'_0<z_0$. 就是說，根据以上的手續将表加以变形，則 $z_0$ 单調减小，不会停留在同一个基底，因而最后达到最优表。这种作法就是对偶法，此法将在下节的例子里用到。

## §7 問題的修正

在綫性規划中，得到一个問題的最优解以后，又会产生与它只有少許差别的問題，这种事是常有的。在这种情况，常常是利用对原有問題已經得到的最优表作新問題的初始表，比对新問題从头

开始进行計算要簡单。这时所得到的表若是S型，用单純形法(§3)；若是D型，则用对偶法(§6)来处理。本节将举几个例来討論这些方法。[参閱大沢丰：关于綫性规划中的条件的变化，經营科学，第1卷，第1号(1956)，第29～34頁；大阪大学經济学，第5卷(1956)，第582～605頁。]

**例1　价値 $v_j$ 的变化**　設各种活动的价値 $v_j$ 发生了变化。最优表的本体部分还是那样，将 $v_i$ 和 $v_j$ 栏变为新的值。下边的 $z_j-v_j$ 栏（$z_0$ 也含在內）也就随之利用(3.14)重新計算。其結果必是S型。若不出現負的 $z_j-v_j$，最优解就不需要修正。若出現了負的 $z_j-v_j$，根据普通的单純形的步驟加以改善就行。

特別是当价値 $v_j$ 的变化与参数 $\theta$ 有綫性关系，而可以表示为

$$v_j=v_j^0+v_j^1\theta \tag{7.1}$$

时，若記对于 $\theta=0$ 的最优表的元素为 $b_{ij}$ ($i\in B$, $j=0, 1, \cdots, n+m$)，則对于一般 $\theta$ 的 $z_j-v_j$ 成为

$$\begin{aligned}z_j-v_j&=\sum_{i\in B}(v_i^0+v_i^1\theta)b_{ij}-(v_j^0+v_j^1\theta)\\&=\left(\sum_{i\in B}v_i^0b_{ij}-v_j^0\right)+\left(\sum_{i\in B}v_i^1b_{ij}-v_j^1\right)\theta\\&\equiv(z_j^0-v_j^0)+(z_j^1-v_j^1)\theta.\end{aligned}\tag{7.2}$$

若 $j\in B$，这必然是0. 当 $j\in K$ 时，只要它 $\geqslant 0$，則最优解不变。当(7.2)中 $\theta$ 的系数是負的，而且 $\theta$ 变为充分大时，这个条件就不会得到滿足。在这种情况，不需修正的 $\theta$ 的限度以

$$\theta=\min\left\{-\frac{z_k^0-v_k^0}{z_k^1-v_k^1}: k\in K, z_k^1-v_k^1<0\right\} \tag{7.3}$$

給出(文献[13]，第174頁)。

**例2**　在§1例1中，随产品 $A$ 每1公斤的利潤逐漸增加，最优规划与最大利潤有什么样的变化?

現在是 $v_1^0=7$（万元/公斤）。因此令 $\theta$ 为正的参数，$v_1=7+\theta$。对于 $\theta=0$，在表2.1的第3段得到最优表，因此用它作为初始表，則得表7.1的

表 7.1 价值变化的例子

| 段 | $v_i$ | 变数 ($v_j \to$) | 0<br>$s$ | $7+\theta$<br>$x_1$ | 12<br>$x_2$ | 0<br>$\lambda_1$ | 0<br>$\lambda_2$ | 0<br>$\lambda_3$ | 計 | $\theta_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | $\lambda_1$ | 84 | 0 | 0 | 1 | −3.12 | 1.16 | 83.04 | 72.41 → |
| | $7+\theta$ | $x_1$ | 20 | 1 | 0 | 0 | 0.40 | −0.20 | 21.20 | — |
| | 12 | $x_2$ | 24 | 0 | 1 | 0 | −0.12 | 0.16 | 25.04 | 150 |
| | | $z_j-v_j$ | 428<br>$+20\theta$ | 0 | 0 | 0 | 1.36<br>$+0.40\theta$ | 0.52<br>$-0.20\theta$ | 429.88<br>$+20.20\theta$ | $0\leqslant\theta\leqslant2.6$ |
| 2 | 0 | $\lambda_3$ | 72.41379 | 0 | 0 | 0.86207 | −2.68966 | 1 | 71.58621 | — |
| | $7+\theta$ | $x_1$ | 34.48276 | 1 | 0 | 0.17241 | −0.13793 | 0 | 35.51724 | — |
| | 12 | $x_2$ | 12.41379 | 0 | 1 | −0.13793 | 0.31035 | 0 | 13.58621 | → |
| | | $z_j-v_j$ | 390.34483<br>$+34.48276\theta$ | 0 | 0 | −0.44828<br>$+0.17241\theta$ | 2.75862<br>$-0.13793\theta$ | 0 | 392.65517<br>$+35.51724\theta$ | $2.6\leqslant\theta\leqslant20$ |
| 3 | 0 | $\lambda_3$ | 179.99836 | 0 | 8.66654 | −0.33330 | 0 | 1 | 189.33163 | |
| | $7+\theta$ | $x_1$ | 39.99987 | 1 | 0.44443 | 0.11111 | 0 | 0 | 41.55541 | |
| | 0 | $\lambda_2$ | 39.99932 | 0 | 3.22217 | −0.44443 | 1 | 0 | 43.77706 | |
| | | $z_j-v_j$ | 280.00191<br>$+39.99987\theta$ | 0 | −8.88874<br>$+0.44443\theta$ | 0.77773<br>$+0.11111\theta$ | 0 | 0 | 271.89090<br>$+41.55541\theta$ | $20\leqslant\theta$ |

第1段。由此可見，在 $z_j-v_j$ 之中只可能 $\lambda_3$ 列会成負的，它是 $0.52-0.20\theta$，所以 $\theta=0.52/0.20=2.6$ 时成为0，只要 $\theta$ 不超过这个限度，就不会成为負的。因此，第1段(图1.1的 $B$ 点)是在 $0\leqslant\theta\leqslant2.6$ 的范圍内为最优。

設 $\theta$ 稍微超过2.6，轉到下一段（表7.1第2段）。这个表（图1.1的 $C$ 点）是对于 $2.6\leqslant\theta\leqslant20$ 为最优。$\theta$ 超过20，則 $\lambda_2$ 列的 $z_j-v_j$ 变成負的，因而轉到第3段。第3段（图1.1的D点）是对于 $\theta\geqslant20$ 为最优。

如此，得到随 $\theta$ 的变化而起的最优規划的轉变与最大利潤 $f$ 的式子。以图表示，則如图7.1。

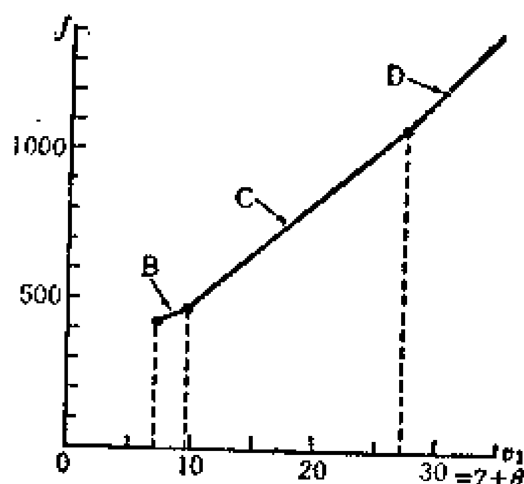



图7.1 随价值变化而引起的利潤变化

**再来考虑資源利用限度 $s_i$ 发生变化的情况。这时在最后的表中，只将 $s$ 列重新計算就行。为此用（5.1）。結果一定是D型。若 $s$ 列中不出現負的，于此得到最优解。若出現了負的，用对偶法(§6)作改进就行。**

**例3** 在§1例1中，电力的利用限度增大时，最优規划怎样变化?

用表2.1的第3段，重新計算 $s$ 列为 $s_2=200+\theta$，則得如表7.2的第1段。这是对 $0\leqslant\theta\leqslant26.92(=84/3.12)$ 的范圍为最优。对于 $26.92\leqslant\theta$，表中第2段(图1.1的 $E$ 点)为最优。

**当在最初的規划时不曾考虑到的活动有所追加的情况，可以根据修訂单純形法(§5)的思路处理。就是說，用新的活动的技术系数与各种資源的边际价值 $u_i^*=z_{n+i}$，根据（5.4）求出 $z_j$，将它同新的活动 $v_j$ 比較，若 $z_j>v_j$，則采取新的活动是不利的，若 $z_j<v_j$，則有利。判断为有利时，根据（5.2）求出那一列，轉入单純形法的步驟。**

**例4** 在§1例1中，設追加产品 $C$ 与 $D$，其技术系数与利潤系数如表7.3所示(单位与表1.1相同)。

表 7.2 資源利用限度变化的例子

| 段 | $v_i$ | 变数 ($v_j \to$) | 0<br>$s$ | 7<br>$x_1$ | 12<br>$x_2$ | 0<br>$\lambda_1$ | 0<br>$\lambda_2$ | 0<br>$\lambda_3$ | 計 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | $\lambda_1$ | $84-3.12\theta$ | 0 | 0 | 1 | $-3.12$ | 1.16 | $83.04-3.12\theta$ | |
| | 7 | $x_1$ | $20+0.40\theta$ | 1 | 0 | 0 | 0.40 | $-0.20$ | $21.20+0.40\theta$ | |
| | 12 | $x_2$ | $24-0.12\theta$ | 0 | 1 | 0 | $-0.12$ | 0.16 | $25.04-0.12\theta$ | |
| | | $z_j-v_j$ | $428+1.36\theta$ | 0 | 0 | 0 | 1.36 | 0.52 | $429.88+1.36\theta$ | $0\leqslant\theta\leqslant 26.92$ |
| 2 | 0 | $\lambda_2$ | $-26.92308+\theta$ | 0 | 0 | $-0.32051$ | 1 | $-0.37180$ | $-26.61538+\theta$ | |
| | 7 | $x_1$ | 30.76923 | 1 | 0 | 0.12820 | 0 | $-0.05128$ | 31.84615 | |
| | 12 | $x_2$ | 20.76923 | 0 | 1 | $-0.03846$ | 0 | 0.11538 | 21.84615 | |
| | | $z_j-v_j$ | 464.61539 | 0 | 0 | 0.43589 | 0 | 1.02565 | 466.07692 | $26.92\leqslant\theta$ |

表 7.3　新产品

| 产　品 | $C$ | $D$ |
|---|---|---|
| 煤　炭 | 3 | 12 |
| 电　力 | 6 | 3 |
| 劳　力 | 8 | 4 |
| 利　潤 | 10 | 8 |

先对 $C$ 是

$$z_j=3\times 0+6\times 1.36+8\times 0.52=12.32,$$

較 $v_j=10$ 大，所以若追加 $C$，則每1公斤減少利潤2.32万元。再对 $D$ 是

$$z_j=12\times 0+3\times 1.36+4\times 0.52=6.16,$$

所以 $v_j=8$ 大，即若追加产品 $D$，則每1公斤增加利潤1.84万元。为此所作的修正只須对产品 $D$ 的列以 $12Q_1+3Q_2+4Q_3$ 求出，再进行单純形法的計算就行。結果是生产产品 $A$ 15.38公斤，$B$ 20.77公斤，$D$ 11.54公斤，利潤是449.23万元。

最后，考虑新追加一个条件

$$a_{m+1,1}x_1+\cdots+a_{m+1,n}x_n\leqslant s_{m+1} \tag{7.4}$$

的情况。若已有規划中的 $x_j(j=1,\cdots,n)$ 滿足 (7.4)，則沒有問題。若不是这样，就必須作新的表来修正規划。新的初始表是，在已有的最优表中追加对应于条件(7.4)的松弛变数 $\lambda_{m+1}(=y_{n+m+1})$ 的列与 $\lambda_{m+1}$ 的行。因为以 $\lambda_{m+1}$ 作基底变数，使 $\lambda_{m+1}$ 的列为单位向量（“1”放进 $\lambda_{m+1}$ 的行內）即可。$\lambda_{m+1}$ 的行一般可由下式求出：

$$b_{n+m+1,j}=a_{m+1,j}-\sum_{i\in B}a_{m+1,i}b_{ij}$$

$$(j=0,\cdots,m+n). \tag{7.5}$$

式中，設 $B$ 为已有最优表的基底变数号碼的集合，$a_{m+1,i}$ 是对于 $1\leqslant i\leqslant n$ 采用由 (7.4) 所給出的值，对于 $n+1\leqslant i\leqslant n+m$ 都是0。(7.5) 右边第2項可以与在表的左側将 $v_i$ 換写为 $a_{m+1,i}$，再从(3.4)求 $z_j$ 同样的方法来計算。这样得到的表是D型，因此可用对偶法进行修正。

［(7.5) 的根据］ 因为在新的初始表中，基底变数 $y_i(i\in B)$ 与 $y_{n+m+1}$ $(=\lambda_{m+1})$ 的列是单位向量，所以对任意的列（第 $j$ 列）有

$$[\text{第 } j \text{ 列}]=\sum_{i\in B}b_{ij}[\text{第 } i \text{ 列}]+b_{n+m+1,j}[\text{第 } n+m+1 \text{ 列}]$$

成立。这个关系，对于从現在的最优表推上去，直到在原来問題的初始表中追加有 $\lambda_{m+1}$ 的行和列的表，也是应当成立的（§5）。特别是若着眼于其中 $\lambda_{m+1}$ 行的元素，則知

$$a_{m+1,j}=\sum_{i\in B} b_{ij}a_{m+1,i}+b_{n+m+1,j}$$

成立。就此对 $b_{n+m+1,j}$ 求解，則得(7.5)。

**例5** 对§1例1的問題求出解答以后，假設这个月只准备有总额150万元的流动資金，而对于产品 $A$，$B$ 各1公斤的生产分别需流动資金5万元，3万元。

新追加的条件可写作

$$5x_1+3x_2\leqslant 150. \tag{7.6}$$

在表2.1的第1段与第3段追加对应于(7.6)的 $\lambda_4$ 的行与列，如表7.4的

表7.4 追加条件的例子

| | | | | $v_j\to$ | 0 | 7 | 12 | 0 | 0 | 0 | **0** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $a_{4i}$ | $v_i$ | $i$ | $j\to$ 变数 | 0 $s$ | 1 $x_1$ | 2 $x_2$ | 3 $\lambda_1$ | 4 $\lambda_2$ | 5 $\lambda_3$ | **6** $\lambda_4$ |
| a | | 0 | 3 | $\lambda_1$ | 360 | 9 | 4 | 1 | 0 | 0 | **0** |
| | | 0 | 4 | $\lambda_2$ | 200 | 4 | 5 | 0 | 1 | 0 | **0** |
| | | 0 | 5 | $\lambda_3$ | 300 | 3 | 10 | 0 | 0 | 1 | **0** |
| | | **0** | **6** | $\lambda_4$ | **150** | **5** | **3** | **0** | **0** | **0** | **1** |
| | | | | $z_j-v_j$ | 0 | −7 | −12 | 0 | 0 | 0 | **0** |
| b | 0 | 0 | 3 | $\lambda_1$ | -84 | 0 | 0 | 1 | −3.12 | 1.16 | **0** |
| | 5 | 7 | 1 | $x_1$ | 20 | 1 | 0 | 0 | 0.40 | −0.20 | **0** |
| | 3 | 12 | 2 | $x_2$ | 24 | 0 | 1 | 0 | −0.12 | 0.16 | **0** |
| | | **0** | **6** | $\lambda_4$ | **−22** | **0** | **0** | **0** | **−1.64** | **0.52** | **1** |
| | | | | $z_j-v_j$ | 428 | 0 | 0 | 0 | 1.36 | 0.52 | **0** |
| c | | 0 | 3 | $\lambda_1$ | 125.84 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0.1706 | −1.9026 |
| | | 7 | 1 | $x_1$ | 14.64 | 1 | 0 | 0 | 0 | −0.0732 | 0.2439 |
| | | 12 | 2 | $x_2$ | 25.61 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0.1219 | −0.0732 |
| | | 0 | 4 | $\lambda_2$ | 13.41 | 0 | 0 | 0 | 1 | −0.3171 | −0.6098 |
| | | | | $z_j-v_j$ | 409.76 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.9513 | 0.8293 |

黑体字表示追加栏。

a, b (a 是为了說明所作的), b 是用 (7.5) 求出的。即是进行了如下的計算(为了計算方便在左边記入 $a_{4i}(i\in B)$ 的值 0, 5, 3)。

$$b_{60}=150-\{0\times(84)+5\times(20)+3\times(24)\}=-22,$$

$$b_{64}=0-\{0\times(-3.12)+5\times(0.40)+3\times(-0.12)\}=-1.64,$$

$$b_{65}=0-\{0\times(1.16)+5\times(-0.20)+3\times(0.16)\}=0.52.$$

表 b 是 D 型。用对偶法将此修正則得新的最优表 c，它表示 $x_1=14.64$ 公斤，$x_2=25.61$ 公斤的規划。利潤減少为 $f=409.76$ 万元。流动資金的不足就招来大約 18 万元的損失。

在 §4 中，說明了对于含有反方向的不等式的問題可用罰款改为标准型，再用普通的单純形法。为此，对于反方向的不等式，只导入表示使用过度的松弛变数 $\mu_i$，可以作出将全部松弛变数作为基底的表。这时的表，因为在 $s$ 的列內含有負数，所以不是 S 型。若 $z_j-v_j$ $(1\leqslant j\leqslant n+m)$ 中沒有負数，則为 D 型，因此可用对偶法处理。若不是那样，暂且忽視不方便的活动而用对偶法，或是暂且忽視不方便的条件而用普通的单純形法，先达到在这个限度的最优表，以后，再与本节中所述的方法一样，考虑用与上面相反的手法继續进行(在这个情况下，决定了樞軸件以后进行迭代的計算时，对于“忽視”了的活动的列以及条件式的行最好也进行同样的計算)。

# 第3章　綫性規划的应用

有了在綫性不等式的約束下，使綫性函数最大或最小的綫性規划問題，就可以用单純形法或对偶法求解。由于問題的性质，解有时也不存在。然而，为了知道解的存在不存在，这些解法也是有效的。因此，只要有充分的計算設备，主要的工作就是完善地进行問題的定式化，和同时利用問題的特征来考虑計算的簡单化，这两者有密切关系。因为若在問題的定式化上加費心思，則結果出来的系数有时可以成为非常特殊的。在这一章里，将对运輸問題、博奕論、产业关連分析等簡单地叙述其解法的技巧，以及在系数不十分确定时处理問題的方法。

## §8　运輸問題

运輸問題有具有下列特征的条件。

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=t_j \quad (j=1, \cdots, n), \tag{8.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=s_i \quad (i=1, \cdots, m), \tag{8.2}$$

$$x_{ij}\geqslant 0 \quad (i=1, \cdots, m;\ j=1, \cdots, n), \tag{8.3}$$

$$\text{Min}: g(x_{ij})=\sum c_{ij}x_{ij} \text{ 或 } \text{Max}: f(x_{ij})=\sum v_{ij}x_{ij}, \tag{8.4}$$

式中 $s_i$, $t_j$, $c_{ij}$ 为非负整数，$\sum\limits_{i=1}^{m} s_i=\sum\limits_{j=1}^{n} t_j$, $v_{ij}=-c_{ij}$。

表8.1表示使生产工厂与銷售店之間的运輸費用最小的例子。

就是說，給出从工厂 $F_i$ 到銷售店 $G_j$ 运輸1单位产品的費用 $c_{ij}$，例如 $F_1\rightarrow G_2$ 是16元（1单位产品）；幷在表的边上設工厂 $F_1$

表8.1 运輸費用 $c_{ij}(-v_{ij})$

| 工厂 \ 銷售店 | $G_1$ | $G_2$ | $G_3$ | $G_4$ | $G_5$ | 生产量 $s_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_1$ | 4 | 16 | 9 | 12 | 20 | 15 |
| $F_2$ | 15 | 4 | 8 | 14 | 0 | 10 |
| $F_3$ | 9 | 6 | 13 | 7 | 14 | 6 |
| 銷售量 $t_j$ | 8 | 7 | 9 | 3 | 4 | 31 |

的生产量 $s_1=15$ 与銷售店 $G_2$ 的銷售量 $t_2=7$ 等等。現在又設 $F_i \to G_j$ 的运輸量为 $x_{ij}$，則其运輸費用为 $c_{ij}x_{ij}$，总运輸費用 $g(x_{ij})=\sum c_{ij}x_{ij}$ 就是目标函数,要使此最小。

写作通常的綫性規划問題,則如下:

$$Ax=\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}, \tag{8.5}$$

$$x \geqslant 0, \tag{8.6}$$

$$\min: g(x)=cx. \tag{8.7}$$

式中

$$c=[4\ \ 16\ \ 9\ \ 12\ \ 20\ \ 15\ \ 4\ \ 8\ \ 14\ \ 0\ \ 9\ \ 6\ \ 13\ \ 7\ \ 14],$$

$$A=\begin{bmatrix}
1&1&1&1&1&&&&&&&&&& \\
&&&&&1&1&1&1&1&&&&& \\
&&&&&&&&&&1&1&1&1&1 \\
1&&&&&1&&&&&1&&&& \\
&1&&&&&1&&&&&1&&& \\
&&1&&&&&1&&&&&1&& \\
&&&1&&&&&1&&&&&1& \\
&&&&1&&&&&1&&&&&1
\end{bmatrix}$$

A中空白的地方是0.

$$x=[x_{11}\ x_{12}\ x_{13}\ x_{14}\ x_{15}\ x_{21}\ x_{22}\ x_{23}\ x_{24}\ x_{25}\ x_{31}\ x_{32}\ x_{33}\ x_{34}\ x_{35}],$$

$$s=[15\ \ 10\ \ 6], \qquad t=[8\ \ 7\ \ 9\ \ 3\ \ 4].$$

向量記号的使用对行与列不加区别。

从 $A$ 中显著看到的特征，是它的元素是 0 与 1，就一个运輸过程說，1 有两次而其他的是 0. 加之，$s$, $t$ 的系数也是整数值，因此就有以下的性质：(1)解一定存在，(2)尽管条件是以等式給出的，也很容易找出初始的并且非常有利的基本解(就是 §3 的基底解)，(3)基本解是整数解，(4)将任意的过程以属于基本解的过程表示，則只需 0，$-1$，1 就可表示，(5)因之可以利用单純形法的簡便方法。

(8.1)的 $n$ 个式子加在一起，等于 (8.2) 的 $m$ 个式子加在一起。即

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=\sum_{i=1}^{m}s_i=\sum_{j=1}^{n}t_j=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}. \tag{8.8}$$

(8.1)与(8.2)的$(m+n)$个式子当中給定 $(m+n-1)$ 个，則剩下的一个可以从(8.8)中导出。所以独立的条件有$(m+n-1)$个，使用的过程数若比$(m+n-1)$个小就会发生退化。

为了尽量得到有利的初始基本解，可以从运輸費用是最小的地方一一用起(Houthakker 方法)。运輸过程中正的元素有两个，其他的是 0，因此，結合对应于正的元素的两个条件加以考虑，而在满足其中任何一个条件的水平上采用，例如 $P_{25}=4$ (表 8.2a)。

表 8.2 初始基本解的求法

a

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| | | | | 4 | |
| | | | | | |
| | | | | 4 | |

b

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| | 6 | | | 4 | 10 |
| | | | | | |
| | | | | 4 | |

c

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| | 6 | | | 4 | 10 |
| | 1 | | | | |
| | 7 | | | 4 | |

d

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 8 | | | | | |
| | 6 | | | 4 | 10 |
| | 1 | | | | |
| 8 | 7 | | | 4 | |

e

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 8 | | | | | |
| | 6 | | | 4 | 10 |
| | 1 | | 3 | | |
| 8 | 7 | | 3 | 4 | |

f

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 8 | | 7 | | | 15 |
| | 6 | | | 4 | 10 |
| | 1 | | 3 | | |
| 8 | 7 | | 3 | 4 | |

g

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 8 | | 7 | | | 15 |
| | 6 | | | 4 | 10 |
| | 1 | 2 | 3 | | 6 |
| 8 | 7 | 9 | 3 | 4 | |

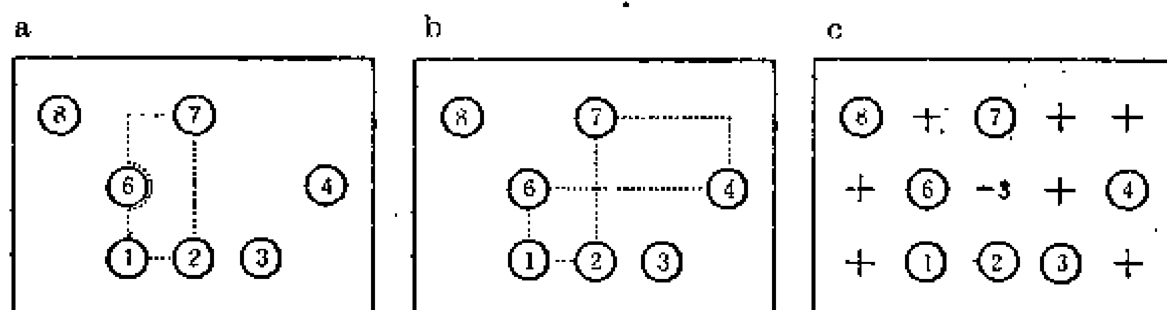
然后再在与满足了的条件相对应的行或列除去后所剩下的运輸費

用表中采用最有利的，这样反复进行，以达到表 $g$. 这就是初始基本解 $x=(8\ 0\ 7\ 0\ 0\ 0\ 6\ 0\ 0\ 4\ 0\ 1\ 2\ 3\ 0)$，这时的运费是 $\sum c_{ij}x_{ij}=172$.

其次，利用单純形判别准則 $z_{ij}-v_{ij}$ 来看这个基本解是否最优。为此，先必須用已經使用的运輸过程（$P_{11}$，$P_{13}$，$P_{22}$，$P_{25}$，$P_{32}$，$P_{33}$，$P_{34}$）表示尙未使用的运輸过程，例如 $P_{12}$. 因为使用的过程数是 $(m+n-1)=(3+5-1)=7$，从而是非退化的情况，所以 $P_{12}$ 可以唯一地表示如下：

$$P_{12}=P_{13}-P_{33}+P_{32}+0\times(P_{11}+P_{22}+P_{25}+P_{34}). \quad (8.9)$$

表 8.3　$z_{ij}-v_{ij}=z_{ij}+c_{ij}$ 的表




(8.9) 的关系，可以在表 8.3a 上利用对应于基本解的过程所构成的閉回路得到。(8.9) 右边的系数是 1, 0, $-1$, 乘以与此对应的 $v_{ij}$ 而相加，則得 $z_{12}$ 为

$$z_{12}=-9+13-6=-2.$$

由于 $P_{12}$ 采用了 1 单位，而进行相当于 (8.9) 右边的調整，从而减少了費用 2. 另一方面，由于 $P_{12}$ 的采用而增加的費用是 $-v_{12}=16$. 因此两者合計結果是

$$z_{12}-v_{12}=-2+16=14.$$

这表示由于 $P_{12}$ 的采用，費用有所增加。再在 $P_{15}$ 的情况，利用表 8.3b 求判别准則，即

$$z_{15}-v_{15}=0+4-6+13-9+20=22$$

$(c_{ij}=-v_{ij})$. 同样对所有尙未使用的过程求出其判别准則，然后

仅将其数不是＋的填入表内，则得表 8.3c。

$F_2\to G_3$ 的运輸过程，$P_{23}$ 的 $z_{23}-v_{23}$ 是 $-3$，这表示費用減少，因此下一个便采用它。采用 $P_{23}$ 1 单位就要減少 $P_{22}$ 与 $P_{33}$ 各 1 单位。現有运輸規划中 $P_{22}$，$P_{33}$ 的使用水平是 $(x_{22}, x_{33})=(6, 2)$，以 1 除就得到用来发現要換掉的运輸过程的 $\theta$ 的值，因此，去掉对应于其中較小值 2 的 $P_{33}$，則 $P_{23}$ 的采用水平决定为 2。这时的运輸規划由表 8.4 所給出。同上一个运輸規划不同的只是与 $P_{23}$ 有关系的运輸过程的水平。

表 8.4 最优运輸規划

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ⑧ | + | ⑦ | + | + |
| + | ④ | ② | + | ④ |
| + | ③ | + | ③ | + |

对于这个运輸規划与以上同样，求出其判别准則，結果全部非負，因此可知它是最优規划，这时最小运輸費用是 166。

这个問題有 7 个約束条件，用通常的单純形法从松弛向量或人造向量出发时，就須大約 10 次左右才可以达到最优規划，因而可知利用运輸問題的特殊性的解法是非常强有力的。

与修訂单純形法对应的以下的方法，将比从閉回路来評价单純形判别准則 $z_{ij}-v_{ij}$ 要容易計算。这在运輸过程数增大时特別有效。就是，若决定了基本运輸規划，用对应于基本解的 $c_{ij}$ 根据下式計算 $u_i$，$v_j$（$v_{ij}$ 表示 $F_i\to G_j$ 的运輸过程的利益）。

$$c_{ij}=-v_{ij}=u_i+v_j \text{（对于基本解的 } (i, j)\text{）。} \tag{8.10}$$

这样則任意的 $z_{ij}$ 的評价式为

$$-z_{ij}=u_i+v_j. \tag{8.11}$$

因为(8.10)中方程的个数是 $(m+n-1)$，所以在評价 $(m+n)$ 个的 $u_i$ 与 $v_j$ 时，有必要先确定其中的任一个。現命 $u_2=0$，則在表 8.5c 中依 $u_2$，$v_5$，$v_2$，$u_3$，$v_4$，$v_3$，$u_1$，$v_1$ 的順序决定。用此在 $c$

表 8.5

a　$-v_{ij}(c_{ij})$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 16 | 9 | 12 | 20 |
| 15 | 4 | 8 | 14 | 0 |
| 9 | 6 | 13 | 7 | 14 |

b　基本运輸規划

| | | | | | | $s_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 8 | | 7 | | | 15 |
| | | 6 | | | 4 | 10 |
| | | 1 | 2 | 3 | | 6 |
| $t_j$ | 8 | 7 | 9 | 3 | 4 | |

c　$u_i$, $v_j$

| | | | | | | $u_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 4 | | 9 | | | −2 |
| | | 4 | | | 0 | 0 |
| | | 6 | 13 | 7 | | 2 |
| $v_j$ | 6 | 4 | 11 | 5 | 0 | |

d　$z_{ij}-v_{ij}$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ⑧ | + | ⑦ | + | + |
| + | ⑥ | −3 | + | ④ |
| + | ① | ② | ③ | + |

e　最优規划

| | | | | | | $u_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | ⑧ | + | ⑦ | + | + | 1 |
| | + | ④ | ② | + | ④ | 0 |
| | + | ③ | + | ③ | + | 2 |
| $v_j$ | 3 | 4 | 8 | 5 | 0 | |

表中計算出 $-z_{ij}$，将它从 a 表的費用中减去，則 $z_{ij}-v_{ij}$ 便从 d 表中求出。其对应于基本規划的值当然等于 0。为了計算方便，那里将运輸規划填进去。由于 $z_{23}-v_{23}=-3$，便采取 $P_{23}$，这与上面从閉回路考慮的同样，决定采用水平为 2。将新的运輸規划填进 e 表再求 $u_i$, $v_j$ 計算 $z_{ij}-v_{ij}$，則对于尙未采用的过程全部是正的，可知其为最优規划。这一次把相当于 b, c, d 表的結合起来只用 e 表作完。

使 $u_i'=u_i+d$, $v_j'=v_j-d$，則 $u_i'+v_j'=u_i+v_j$，因此用 $u_i'$, $v_j'$ 代替 $u_i$, $v_j$，則評价不变。

再者，将 $s_i$ 的条件增加 1，当使 $s_i'=s_i+1$ 时，为了保持 $\sum_i s_i=\sum_j t_j$，$t_j$ 也增大 1，而使 $t_j'=t_j+1$，此时費用的增加，从表 8.5 c 的制作过程可知，将由 $u_i+v_j$ 給出。

## §9　有不确定需要的生产运輸規划

需要量的預測往往是有困难的。因此可以設想对于一个銷售店也不能决定一个确定的数量，而是有种种的数量。現設这些数量实現的概率为已知 [Forguson & Dantzig, 17]。

設工厂 $F_i$ 生产出来的 1 单位产品运輸到銷售店 $G_j$ 时的生

产·运輸費如表 9.1. 这与 §8 的表 8.1 用相同的数值。生产量 $s_i$ 也相同，但是需要量却与其实現的概率一并給出。

表 9.1 生产·运輸費 $c_{ij}$

| 工厂＼銷售店 | $G_1$ | | | $G_2$ | | | $G_3$ | | $G_4$ | | | $G_5$ | | $S_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_1$ | 4 | | | 16 | | | 9 | | 12 | | | 20 | | 15 |
| $F_2$ | 15 | | | 4 | | | 8 | | 14 | | | 0 | | 10 |
| $F_3$ | 9 | | | 6 | | | 13 | | 7 | | | 14 | | 6 |
| 需要量 $d_j^h$ | 8 | 9 | 12 | 7 | 8 | 10 | 9 | 10 | 3 | 5 | 6 | 4 | 5 | |
| 需要实現的概率 $\lambda_j^h$ | 0.2 | 0.6 | 0.2 | 0.1 | 0.7 | 0.2 | 0.2 | 0.8 | 0.1 | 0.7 | 0.2 | 0.1 | 0.9 | |

表中 $d_j^h$, $\lambda_j^h$ 是銷售店 $G_j$ 所考虑的第 $h$ 个需要量与它的概率。

各銷售店的銷售价格 $k_i$，为了簡单起見都假設相等，

$$k_i=k=50.$$

为了考察有这样不确定的需要时問題如何处理，現在注目于銷售店 $G_1$ 来看一看需要的性質。

先將运到 $G_1$ 的产品，根据銷售的概率分开来考虑。这样，$h=1, 2, 3$ 的三种的銷售量 $t_1^h$ 为

$$t_1^1=d_1^1=8,$$
$$t_1^2=d_1^2-d_1^1=1,$$
$$t_1^3=d_1^3-d_1^2=3.$$

$t_1^h$ 的可能銷售的概率 $\mu_1^h$ 是

$$\mu_1^1=\lambda_1^1+\lambda_1^2+\lambda_1^3=0.2+0.6+0.2=1,$$
$$\mu_1^2=\lambda_1^2+\lambda_1^3=0.6+0.2=0.8,$$
$$\mu_1^3=\lambda_1^3=0.2.$$

卽得表 9.2.

为了簡单起見，又設运輸的产品对銷售店供給过多时不能保存，因而变为浪費。

表 9.2　銷售店 $G_1$ 的需要与其概率

| 需要的种类 $k$ | 預測需要 $d_1^k$ | 預測需要的实現概率 $\lambda_1^k$ | 預測需要的可能銷售概率 $\mu_1^k$ | 銷售量 $\eta_1^k$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 0.2 | 1 | 8 |
| 2 | 9 | 0.6 | 0.8 | 1 |
| 3 | 12 | 0.2 | 0.2 | 3 |

因此，当供給了 9 单位，而实現了的需要只有 8 单位时，1 单位就被丢掉。并且一旦供給，不論是銷售还是丢掉，均設每单位的費用不变。

現在来看一看供給了 9 单位时的收益。到 8 单位为止，可以以概率 1 銷售，因此是 $8\times50=400$. 第 9 单位的可能銷售概率是 0.8，因此平均銷售額是 $0.8\times50+0.2\times0=40$.

再看一看供給了 11 单位时的平均銷售額。8 单位可以以概率 1 銷售，因此是 $8\times50=400$. 第 9 单位可以以概率 0.8 銷售，因此是 $0.8\times50=40$. 第 10、11 的两个单位可以以概率 0.2 銷售，因此平均銷售額是 $50\times0.2\times2=20$.

供給了 12 单位时，最后的第 10, 11, 12 的三个单位的平均銷售是 $50\times0.2\times3=30$. 如果再供給多了，也不会增加銷售額。

从以上可知，供給虽然增加，但是平均銷售額并不成比例增大(图 9.1)。

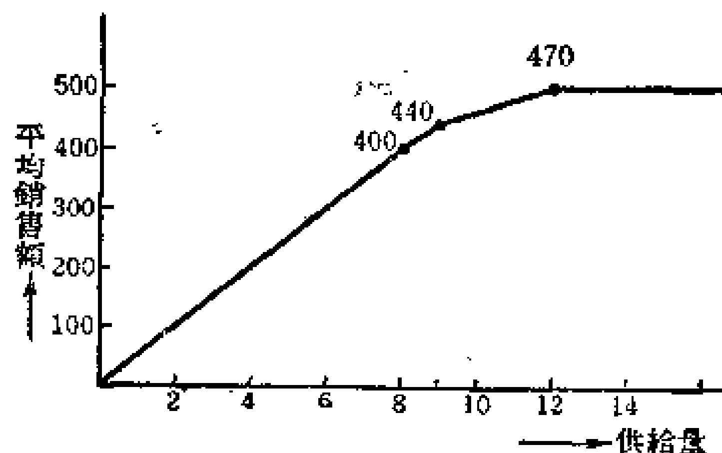


图 9.1　銷售店 $G_1$ 的供給与銷售額

［注］　若从表 9.1 計算 $G_1$ 的平均需要，再与前节中的需要作同样的处理，而对問題定式化，则平均需要量为 $8\times0.2+9\times0.6+12\times0.2=9.4$，从而发生了不是整数值的情况，虽然不会有这样的事。因此，需要作另外的調整。

在这个問題上因为需要超过生产，所以假設生产出来的貨物全部运到銷售店，求使平均利潤为最大的生产运輸銷售規划。$G_1$ 对各种运輸量的平均銷售额如表 9.3。

表 9.3 $G_1$ 的平均銷售价格

| $h$ | 銷售价格 $k_1$ | 銷售实现的概率 $\mu_1^h$ | 平均銷售价格 $k_1\mu_1^h$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 50 | 1 | 50 |
| 2 | 50 | 0.8 | 40 |
| 3 | 50 | 0.2 | 10 |

对 $G_1$ 的运輸量 $x_{i1}^h$，根据不同供給，不同需要表示如表 9.4。

表 9.4

a $G_1$ 的不同需要的运輸規划

| 工厂 \ 銷售店 | $G_1$ | | |
|---|---|---|---|
| $F_1$ | $x_{11}^1$ | $x_{11}^2$ | $x_{11}^3$ |
| $F_2$ | $x_{21}^1$ | $x_{21}^2$ | $x_{21}^3$ |
| $F_3$ | $x_{31}^1$ | $x_{31}^2$ | $x_{31}^3$ |
| 銷售量 $t_1^h$ | $t_1^1$ | $t_1^2$ | $t_1^3$ |

b 不同需要的平均价格

| | $G_1$ | | |
|---|---|---|---|
| $F_1$ | 50 | 40 | 10 |
| $F_2$ | 50 | 40 | 10 |
| $F_3$ | 50 | 40 | 10 |

并且可以理解为有具有不同的平均价格的三种需要，由表 9.4 b 給出。

再用表 9.1 求出不同需要的生产运輸费，則如表 9.5 a，将此

表 9.5

a 生产运輸費

| 工厂 \ 銷售店 | $G_1$ | | |
|---|---|---|---|
| $F_1$ | 4 | 4 | 4 |
| $F_2$ | 15 | 15 | 15 |
| $F_3$ | 9 | 9 | 9 |

b 平均利潤表

| | $G_1$ | | |
|---|---|---|---|
| $F_1$ | 46 | 36 | 6 |
| $F_2$ | 35 | 25 | × |
| $F_3$ | 41 | 31 | 1 |
| 需要 $b_1^h$ | 8 | 1 | 3 |

×号 不使用的生产运輸过程

从表9.4b的平均价格减去，則得不同需要的平均利潤(表9.5b)。

$G_1$ 的銷售量 $t_1^1$ 表示的是最大的銷售量，而不一定要全部满足，因此条件不等式成为

$$x_{11}^1+x_{21}^1+x_{31}^1\leqslant t_1^1, \tag{9.1a}$$

$$x_{11}^2+x_{21}^2+x_{31}^2\leqslant t_1^2, \tag{9.1b}$$

$$x_{11}^3+x_{21}^3+x_{31}^3\leqslant t_1^3. \tag{9.1c}$$

$\sum_i x_{i1}^1$ 是确实可以銷售的量，因此在它达到限制量 $t_1^1$ 以前，$x_{i1}^2$，$x_{i1}^3$ 不容許取正的值。但是，从平均利潤表看，从同一工厂 $i$ 出厂的产品中，銷售概率大的一定对平均利潤 $v_{ij}^h$ 有利，因此，这些先被挑选。所以，既使不特别作为条件导入，(9.1a) 的等式不成立，也不会采用 $x_{i1}^2$，$x_{i1}^3$ 取正值的运輸規划。从图9.1可知，若对平均利潤說收获遞减时可用折綫表示，能用綫性規划法求解就是为了这个原故。

再者，要将(9.1)的不等式变为等式，只需在左边加上 $x_{01}^h\geqslant 0$。就运輸問題言，这可以設想为需要过多，因此可以从假想的工厂 $F_0$ 的供給满足这种需要。这样作使总需要与总供給相等，变成与§8的問題同样的形式。現将只对 $G_1$ 的需要的条件加以整理，得

$$\sum_i x_{i1}^1+x_{01}^1=t_1^1,\quad \sum_i x_{i1}^2+x_{01}^2=t_1^2,\quad \sum_i x_{i1}^3+x_{01}^3=t_1^3. \tag{9.2}$$

对于 $x_{01}^h$ 的利潤当然是0，因此含此在內的平均利潤表如表9.6。

表9.6 $G_1$ 的平均利潤表

| | | | |
|---|---|---|---|
| $F_1$ | 46 | 36 | 6 |
| $F_2$ | 35 | 25 | × |
| $F_3$ | 41 | 31 | 1 |
| $F_0$ | 0 | 0 | 0 |

用以上对銷售店 $G_1$ 进行的方法对其他銷售店也加以整理，則成运輸問題。

先作出不同需要的平均价格 $k_j\mu_j^h$ (表9.7)，从此处再减去生

表 9.7 不同需要的平均价格 $k_j\mu_j^h$

| 需要的种类 $h$ \ 銷售店 | $G_1$ | $G_2$ | $G_3$ | $G_4$ | $G_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 50 | 50 | 50 | 50 | 50 |
| 2 | 40 | 45 | 40 | 45 | 45 |
| 3 | 10 | 10 | — | 10 | — |

表 9.8 平均利潤 $v_{ij}^h$

| 工厂 \ 銷售店 | $G_1$ | | | $G_2$ | | | $G_3$ | | $G_4$ | | | $G_5$ | | 生产量 $s_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h$ | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | |
| $F_1$ | 46 | 36 | 6 | 36 | 29 | × | 41 | 31 | 38 | 33 | × | 30 | 25 | 15 |
| $F_2$ | 35 | 25 | × | 46 | 41 | 6 | 42 | 32 | 36 | 31 | × | 50 | 45 | 10 |
| $F_3$ | 41 | 31 | 1 | 44 | 39 | 4 | 37 | 27 | 43 | 38 | 3 | 36 | 31 | 6 |
| $F_0$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 12 |
| 需要量 $t_j^h$ | 8 | 1 | 3 | 7 | 1 | 2 | 9 | 1 | 3 | 2 | 1 | 4 | 1 | 43 |

产·运輸費用，求出平均利潤(表 9.8)。

再給出与此对应的需要 $t_j^h$ 与生产量 $s_i$，就完成問題的定式化。即

$$\sum_{i=0}^{3} x_{ij}^h = t_j^h, \tag{9.3a}$$

$$\sum_{j=1}^{5} \sum_{h=1}^{h_j} x_{ij}^h = s_i, \tag{9.3b}$$

$$x_{ij}^h \geqslant 0, \tag{9.3c}$$

$$\max: \sum_{i,j} \sum_{h} v_{ij}^h x_{ij}^h. \tag{9.3d}$$

式中 $i=0, \cdots, 3$; $j=1, \cdots, 5$; $h=1, \cdots, h^j$; $s_0=\sum_j \sum_h t_j^h - \sum_{i=1}^{3} s_i = 12$.

表 9.9 中未作記的部分表示 $z-v$ 是正的值。初始基本运輸規划是用 Houthakker 的規則求出，最优解在三次后达到。这时的平均利潤是 1142，其中确定的部分是 1097，$F_2 \to G_5$ 运到的产品 1

单位的銷售量是不确定，但有平均利潤 45.

表 9.9

a 初始基本运輸規划

| | | | | | | | | | | | | | $u_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ⑧ | | | | | | ⑦ | | | | | | | 41 |
| | | | ⑥ | 0 | | −1 | | | | | ④ | −5 | 40 |
| | | | ① | ① | | | | ③ | ① | | | | 38 |
| | ① | ③ | | | ② | ② | ① | | ① | ① | | ① | 0 |
| $v_j$ 5 | 0 | 0 | 6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 0 | 10 | 0 | |

b 最优运輸規划

| | | | | | | | | | | | | | $u_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ⑧ | | | | | | ⑦ | | | | | | | 41 |
| | | | ④ | | | ① | | | | | ④ | ① | 42 |
| | | | ⑤ | | | | | ⑧ | | | | | 40 |
| | ① | ⑤ | | ① | ② | ① | ① | | ② | ① | | | 0 |
| $v_j$ 5 | 0 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | 8 | 8 | |

## §10　博奕論与綫性規划

現在来討論将矩陣博奕或有条件的矩陣博奕变換为綫性規划問題的求解。若将这个变換过的問題用单純形求解，就可以确实并且有效地找出所有的基本最优策略(宮澤光一：对策的理論)。

現設博奕 $(A, X, Y)$ 的局中人Ⅰ所取策略 $x(m\times 1)$ 的集合 $X$，与局中人Ⅱ所取策略 $y(1\times n)$ 的集合 $Y$，都是非空的凸多面体，对于由支付矩陣 $A(n\times m)$ 所給的Ⅱ对Ⅰ的支付額 $yAx$，局中人Ⅰ尽量使其大，局中人Ⅱ尽量使其小。

〔注1〕 $A$ 的表示方法取与通常的支付矩陣为对称的形式，并且 $X$, $Y$ 不一定要有界。

凸多面体博奕 $(A, X, Y)$ (文献[4]中 Wolfe 的論文)設为

$$X=\{x\,|\,Bx\leqslant b\}, \qquad (10.1a)$$

$$Y=\{y\,|\,yC\geqslant c\}. \qquad (10.1b)$$

式中 $B$ 是 $k\times m$ 矩陣，$C$ 是 $n\times l$ 矩陣，$b$，$c$ 各是 $k\times 1$，$1\times l$。矩陣博奕或有限制的矩陣博奕可以看作是条件 $Bx\leqslant b$ 与 $yC\geqslant c$ 具有特別的形式。因此，先来看将凸多面体博奕变换为綫性規划的問題。

要使 $yAx$ 小的局中人 II，若知道 I 取 $x$，将会在这个条件下使 $yAx$ 小。即是

$$\min y(Ax)\,;\ yC\geqslant c. \tag{10.2}$$

这是关于 $y$ 的綫性規划問題。因为滿足条件的 $y$ 是假定存在的，所以有可行解存在。从而 $\min y(Ax)$ 是有限值或无限小。

現作(10.2)的对偶問題，則为

$$\max cv;\ Cv=Ax,\ v\geqslant 0. \tag{10.3}$$

若 $\min y(Ax)$ 是有限值，則由对偶定理，得

$$\min y(Ax)=\max cv. \tag{10.4}$$

这是 I 取 $x$ 时使 II 的支付額成为最小的值。因此，从 I 的立場說，是采用 $x$ 时确实贏得的数額。这样作为 I 来說，希望在 $Bx\leqslant b$ 的范圍內适当地选擇 (10.3) 的 $x$，从而尽量使 $\max cv$ 大。就是說，将 $v$ 同 $x$ 都当作变数，选擇由

$$\max cv;\ Bx\leqslant b,\ Cv=Ax,\ v\geqslant 0 \tag{10.5}$$

决定的 $x$。这时 I 从 II 确实贏得的数額就是 $\max cv$。

現作(10.5)的对偶問題，則为

$$\min ub;\ yC\geqslant c,\ uB=yA,\ u\geqslant 0. \tag{10.6}$$

[注 2] (10.5)的对偶問題的作法。

对(10.5)加以整理，得

$$\max[c\ 0]\begin{bmatrix} v \\ x \end{bmatrix};\ \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & -A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v \\ x \end{bmatrix}\begin{matrix}\leqslant \\ =\end{matrix}\begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix},\ v\geqslant 0. \tag{10.7}$$

将上式条件全部换为不等式：

$$\begin{bmatrix} 0 & B \\ C & -A \\ -C & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v \\ x \end{bmatrix}\leqslant\begin{bmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ v\geqslant 0.$$

这里使 $x=x_1-x_2$, $x_1\geqslant 0$, $x_2\geqslant 0$, 則

$$\max: [c\ 0\ 0]\begin{bmatrix} v \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0 & B & -B \\ C & -A & A \\ -C & A & -A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v,\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \tag{10.8}$$

作对偶問題，則得

$$\min [u\ y_1\ y_2]\begin{bmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad [u\ y_1\ y_2]\begin{bmatrix} 0 & B & -B \\ C & -A & A \\ -C & A & -A \end{bmatrix} \geqslant [c\ 0\ 0], \quad u,\ y_1,\ y_2 \geqslant 0. \tag{10.9}$$

将条件加以整理，則得

$$[u\ y_1\ y_2]\begin{bmatrix} 0 & B \\ C & -A \\ -C & A \end{bmatrix}(\geqslant,\ =)[c\ 0], \quad u,\ y_1,\ y_2 \geqslant 0,$$

式中 $(\geqslant,\ =)$ 表示对于各自对应的項 $\geqslant$ 与 $=$ 成立。

其次使 $y=y_1-y_2$, 則 $y$ 失去符号的限制。

$$\min ub; \ [u,\ y]\begin{bmatrix} 0 & B \\ C & -A \end{bmatrix}(\geqslant,\ =)[c\ 0], \quad u\geqslant 0. \tag{10.10}$$

将上式分等式部分与不等式部分写，則得 (10.6)．因此，(10.5) 与 (10.6) 为对偶关系。

然而，既是作为决定局中人 I 的行动的綫性規划問題导出了 (10.5)，根据同样的步驟也可求出 (10.6)．首先，若知 II 选擇 $y$，則 I 在这个条件下使 $yAx$ 大。

$$\max (yA)x; \ Bx\leqslant b. \tag{10.11}$$

作上式的对偶問題，即为

$$\min ub; \ uB=yA,\ u\geqslant 0. \tag{10.12}$$

若 (10.11) 与 (10.12) 都有可行解，則

$$\max (yA)x = \min ub. \tag{10.13}$$

作为 II 来說，希望选擇适当的 $y$ 从而尽量使上式的值小。这在 (10.12) 就不是将 $y$ 作为給定的值，而是在 $yC\geqslant c$ 的范圍內变动 $y$ 求 $\min ub$．即是

$$\min ub; \ yC\geqslant c,\ uB=yA,\ u\geqslant 0, \tag{10.14}$$

上式不外乎是(10.6)。

現在，(10.5)的 $\max cv$ 是 I 若作的好就一定可以贏得的数額，(10.6) 的 $\min ub$ 是 II 若作的好就可以不必支付这以上的数額。但是因为(10.5)与(10.6)互为对偶問題，当(10.5)与(10.6)都有可行解时，$\max cv$ 与 $\min ub$ 有共同的有限值，这就是博奕的值。即得下述定理。

**定理 10.1** 当互为对偶問題的

$$\max cv;\ Bx\leqslant b,\ Cv=Ax,\ v\geqslant 0, \tag{a}$$

$$\min ub;\ yC\geqslant c,\ uB=yA,\ u\geqslant 0 \tag{b}$$

都有可行解时，凸多面体博奕 $(A,\ X,\ Y)$，$X=\{x\,|\,Bx\leqslant b\}$，$Y=\{y\,|\,yC\geqslant c\}$ 有有限博奕的值，

$$\max cv=\min ub=w,$$

这时的 $x$, $y$ 給出 I，II 的最优策略。

［注］ 这两个綫性規划問題不一定都可能实行。Wolfe 考察了所有的情况。(a)有可行解，而(b)沒有时，則博奕值为 $+\infty$。相反(a)无可行解，而(b)有时，則博奕值为 $-\infty$。再若(a)(b)都无可行解时，則博奕无值。不論怎样，为了发現这些情况，可將(a)或(b)用单純形法求解。

凸多面体博奕的条件 $Bx\leqslant b$ 与 $yC\geqslant c$ 取下式的特别值时，可以看为有約束的矩陣博奕：

$$B=\begin{bmatrix}-I\\ \underline{1}\\ -\underline{1}\\ B_0\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}\bar{0}\\ 1\\ -1\\ b_0\end{bmatrix},\ C=[I\,\bar{1}\,-\bar{1}\,C_0],\ c=[\underline{0}\,1\,-1\,c_0]. \tag{10.15}$$

式中 $\underline{1}$, $\underline{0}$ 是全由 1 或 0 所作的行向量，$\bar{1}$, $\bar{0}$ 是全由 1 或 0 所作的列向量。

$$X=\{x\,|\,x\geqslant 0,\ \textstyle\sum x_i=1,\ B_0x\leqslant b_0\}, \tag{10.16a}$$

$$Y=\{y\,|\,y\geqslant 0,\ \textstyle\sum y_j=1,\ yC_0\geqslant c_0\} \tag{10.16b}$$

就是 I 与 II 的策略集合。在凸多面体博奕中 $x$ 与 $y$ 不一定有概

率的性质，但有条件的博奕是具有概率性的混合策略。

将有約束的博奕改写为綫性規划的問題，只須結合(10.15)应用定理10.1. 只是有必要将 $v$ 与 $v$ 分割考虑。对于 I

$$\max\,[\underline{0}\,1\,-1\,c]\begin{bmatrix}\tilde{v}\\ \mu_1\\ \mu_2\\ v\end{bmatrix};\quad \begin{bmatrix}-I\\ \underline{1}\\ -\underline{1}\\ B_0\end{bmatrix}x\leqslant\begin{bmatrix}\bar{0}\\ 1\\ -1\\ b_0\end{bmatrix},\quad [I\,\bar{1}\,-\bar{1}\,C_0]\begin{bmatrix}\tilde{v}\\ \mu_1\\ \mu_2\\ v\end{bmatrix}=Ax,$$

$$\tilde{v},\ \mu_1,\ \mu_2,\ v\geqslant 0. \tag{10.17}$$

将上式加以整理，則

$$\max\,\mu_1-\mu_2+cv;\quad x\geqslant 0,\ \sum x_i=1,\ B_0x\leqslant b_0,$$
$$\bar{1}(\mu_1-\mu_2)+I\tilde{v}=Ax-C_0v,\quad \tilde{v},\ \mu_1,\ \mu_2,\ v\geqslant 0, \tag{10.18}$$

$\tilde{v}$ 是起松弛变数的作用。除去 $\tilde{v}$ 便成不等式的条件，再命 $\mu=\mu_1-\mu_2$，则

$$\max\,(\mu+c_0v);\quad x\geqslant 0,\ \sum x_i=1,\ B_0x\leqslant b_0,$$
$$\bar{1}\mu\leqslant Ax-C_0v,\quad v\geqslant 0. \tag{10.19}$$

因为假定 $X=\{x\,|\,x\geqslant 0,\ \sum x_i=1,\ B_0x\leqslant b_0\}$ 不是空集，从其中决定 $x$，再命 $v=0$，就可以找到满足 $\bar{1}\mu\leqslant Ax$ 的 $\mu$ 且使 $\mu$ 取非常小。所以，知(10.19)有可行解。

对于局中人 II 用定理10.1的b，則得

$$\min\,[\tilde{u}\,\lambda_1\,\lambda_2\,u_0]\begin{bmatrix}\bar{0}\\ 1\\ -1\\ b_0\end{bmatrix};\quad y[I\,\bar{1}\,-\bar{1}\,C_0]\geqslant[\underline{0}\,1\,-1\,c_0],$$

$$[\tilde{u}\,\lambda_1\,\lambda_2\,u_0]\begin{bmatrix}-I\\ \underline{1}\\ -\underline{1}\\ B_0\end{bmatrix}=Ax,\quad \tilde{u},\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ u_0\geqslant 0. \tag{10.20}$$

消去 $\tilde{u}$，命 $\lambda=\lambda_1-\lambda_2$，則得

$$\min(\lambda+u_0b_0);\ y\geqslant 0,\ \sum y_j=1,\ yC_0\geqslant c_0,$$
$$\lambda \underline{1}\geqslant yA-u_0B_0,\ u_0\geqslant 0. \tag{10.21}$$

与 1 所作同样，知(10.21)也有可行解。

**定理 10.2** 有条件的矩陣博奕 $(A, X, Y)$，$X=\{x\,|\,x\geqslant 0,\ \sum x_i=1,\ B_0x\leqslant b_0\}$，$Y=\{y\,|\,y\geqslant 0,\ \sum y_j=1,\ yC_0\geqslant c_0\}$ 具有（$X$ 与 $Y$ 不是空集时）有限的值，等价于互为对偶的問題

$$\max(\mu+c_0v_0);\ x\geqslant 0,\ \sum x_i=1,\ B_0x\leqslant b_0,$$
$$\bar{1}\mu\leqslant Ax-C_0v_0,\ v_0\geqslant 0, \tag{a}$$
$$\min(\lambda+u_0b_0);\ y\geqslant 0,\ \sum y_j=1,\ yC_0\geqslant c_0,$$
$$\lambda 1\geqslant yA-u_0B_0,\ u_0\geqslant 0 \tag{b}$$

的有限的最优值

$$\max(\mu+c_0v_0)=\min(\lambda+u_0b_0)=w.$$

博奕的最优策略由这时的 $x$, $y$ 給出。

**例** 設

$$A=\begin{bmatrix}1&4&2\\2&0&3\\3&1&0\end{bmatrix},\ B_0=[1\ \ 2\ \ -1],\ b_0=0,\ C_0=\begin{bmatrix}-3\\-1\\1\end{bmatrix},\ c_0=0,$$

Ⅰ的最优解只需解以下的綫性規划問題：

$$\max\mu;\ \ x\geqslant 0,\ \sum x_i=1,\ \ x_1+2x_2-x_3\leqslant 0,$$
$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\mu\leqslant\begin{bmatrix}1&4&2\\2&0&3\\3&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-3\\-1\\1\end{bmatrix}v_0,\ \ v_0\geqslant 0.$$

Ⅰ的最优策略是 $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=0$, $x_3=\frac{1}{2}$, 博奕的值是 $w=\mu=\frac{3}{2}$. 若求解时用单純形法，则 Ⅱ 的最优策略 $y$ 可作为对偶問題的解同时求得。$y_1=\frac{1}{4}$, $y_2=0$, $y_3=\frac{3}{4}$ 或 $y_1=0$, $y_2=0$, $y_3=1$ 是 Ⅱ 的基本最优策略。

在矩陣博奕 $(A, X, Y)$ 中

$$X=\{x\,|\,x\geqslant 0,\ \sum x_i=1\}, \tag{10.22a}$$
$$Y=\{y\,|\,y\geqslant 0,\ \sum y_j=1\}, \tag{10.22b}$$

作为有限制的博奕的无限制的情况，就容易变换为对应的綫性規划問題。即由定理 10.2 对于 I 作为

$$\max \mu;\ x\geqslant 0,\ \sum x_i=1,\ \underline{1}\mu\leqslant Ax \tag{10.23}$$

求出。取一个满足 $x\geqslant 0$, $\sum x_i=1$ 的 $x$, 一定可以决定一个使 $\underline{1}\mu\leqslant Ax$ 成立的 $\mu$. 因此(10.22)的可行解必定存在。

同样对于 II，有

$$\min \lambda;\ y\geqslant 0,\ \sum y_j=1,\ \lambda\underline{1}\geqslant yA, \tag{10.24}$$

对于上式必定有可行解。因此得以下的定理。

**定理 10.3**　矩陣博奕 $(A, X, Y)$, $X=\{x\,|\,x\geqslant 0,\ \sum x_i=1\}$, $Y=\{y\,|\,y\geqslant 0,\ \sum y_j=1\}$ 具有有限值，等于互为对偶的問題

$$\max \mu;\ x\geqslant 0,\ \sum x_i=1,\ \underline{1}\mu\leqslant Ax, \tag{a}$$

$$\min \lambda;\ y\geqslant 0,\ \sum y_j=1,\ \lambda\underline{1}\geqslant yA \tag{b}$$

的最优值

$$\max \mu=\min \lambda=w.$$

博奕的最优策略由这对 $x$, $y$ 給出。

**例**　設

$$A=\begin{bmatrix}1&4&2\\2&0&3\\3&1&0\end{bmatrix}$$

則 I 的最优策略，由下列的綫性規划問題給出：

$$\max \mu;\ x\geqslant 0,\ \sum x_i=1,\ \underline{1}\mu\leqslant\begin{bmatrix}1&4&2\\2&0&3\\3&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}.$$

对此求解，得 $x_1=11/20$, $x_2=4/20$, $x_3=5/20$. 博奕的值是 $\max\mu=w=37/20$. 对于 II 的 $y$, 利用单純形表的对偶性，可以同时計算得到，$y_1=8/20$, $y_2=7/20$, $y_3=5/20$.

将此結果同前面的結果比較，知有限制的博奕的限制，对 II 是有利的。

## §11 利用最大最小原則的生产規划

在普通的生产規划中，問題是以

$$\max ax;\ Bx \leqslant b,\ x \geqslant 0 \tag{11.1}$$

的形式建立的。$B$ 表示技术系数，$b$ 表示生产因素的限制，$a$ 表示利潤。但 $a$ 是反映市場状态的系数，設較其他系数为不穩定。就是說，$a$ 不确定取 $a^1, \cdots, a^i, \cdots, a^n$ 中的某一个。当在这样的时候就不能象(11.1)那样将問題定式化。

但即使 $a^i$ 本身不确定，如果給出它的概率 $y_i$，利用 $\sum_i y_i a^i = a$ 的平均利潤系数，可以作出与(11.1)同样形式的定式化，但是概率 $y_i$ 可以唯一預測的情况将是很少的。

为了将这样的問題定式化，假設企业的經营者 I 采取尽量回避最坏的情况。那么制定 $x$ 这样的生产規划后的最坏情况将以

$$\min y(Ax),\ y \geqslant 0,\ \sum y_i = 1,\ y[\mathrm{I} - \mathrm{I}] \geqslant [1 - 1] \tag{11.2}$$

給出。式中 $A = \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{bmatrix}$。上式的值又可以由作为該問題的对偶問題的考慮而求出。

$$\max \mu_1 - \mu_2;\ [\mathrm{I} - \mathrm{I}]\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} \leqslant Ax,\ \mu_1 \geqslant 0,\ \mu_2 \geqslant 0. \tag{11.3}$$

經营者 I 依照如何尽量使这个値大而行动。就是說，根据

$$\max \mu;\ \mathrm{I}\mu \leqslant Ax,\ x \geqslant 0,\ Bx \leqslant b \tag{11.4}$$

决定生产規划 $x$. 这可以看作經营者是根据平均利潤 $y(Ax)$ 的最大最小原則行动。

再者，这个經营者 I 的行动原則，可以认为是与由市場所扮演的局中人 II 进行下列的博奕：

$$X = \{x \mid Bx \leqslant b,\ x \geqslant 0\}, \tag{11.5a}$$

$$Y=\{y\,|\,y\geqslant 0,\Sigma y_j=1\}. \qquad (11.5b)$$

**例** 設

$$\text{市場条件}\begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (1\ 7\ 3) \\ (4\ 1\ 5) \end{bmatrix},$$

$$\text{技术系数}\ B=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix},$$

则对于經营者的問題是

$$\max \mu;\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\mu\leqslant\begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},\ x\geqslant 0,\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\leqslant\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

对此求解，得下列結果：

$$x_1=\frac{6}{5},\quad x_2=\frac{3}{5},\quad x_3=0,\quad \mu=\frac{27}{5}.$$

为了比較，假設市場的状态很清楚，目标函数的系数确定为 $a^1=(1\ 7\ 3)$，则

$$x_1=0,\quad x_2=2,\quad x_3=0,\quad \mu=7,$$

再若确定 $a^2=(4\ 1\ 5)$，则

$$x_1=\frac{3}{2},\quad x_2=0,\quad x_3=0,\quad \mu=6.$$

这个生产規划的定式化有两点应該注意。第1是利用生产規划 $x$ 形成多面体。在单純使用矩陣博奕的情况，往往是不用混合策略就計算不出最优解；但是对于只限于一次的行动，使用混合策略，可以說，如果作为行动原则的說明，则說服力不强。在生产規划 $x$ 中，不必要使用利用概率的混合策略。第2是承认市場的积极行动。反过来說，就是作为經营者相对地采取消极的行动。

再来看一看，因为經营者的过去經驗以致市場的行动受到限制的情况。这时的經营者与市場的博奕 $(A, X, Y)$ 是

$$X=\{x\,|\,x\geqslant 0,\ Bx\leqslant b\}=\left\{x\,\middle|\,\begin{bmatrix} -I \\ B \end{bmatrix}x\leqslant\begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}\right\}, \qquad (11.6a)$$

$$\begin{aligned} Y&=\{y\,|\,y\geqslant 0,\ \Sigma y_j=1,\ yC\geqslant c\} \\ &=\{y\,|\,y[I\bar{1}-\bar{1}C]\geqslant[\underline{0}1-1c]. \end{aligned} \qquad (11.6b)$$

利用定理10.1，对于 I 只須解

$$\max[0\ 1\ -1\ c]\begin{bmatrix}\tilde{v}\\ \mu_1\\ \mu_2\\ v\end{bmatrix};\ x\geqslant 0,\ Bx\leqslant b,$$

$$-Ax+[I\ \tilde{1}\ -\tilde{1}\ C]\begin{bmatrix}\tilde{v}\\ \mu_1\\ \mu_2\\ v\end{bmatrix}=0,\quad \begin{bmatrix}\tilde{v}\\ \mu_1\\ \mu_2\\ v\end{bmatrix}\geqslant 0.$$

并且对于 II 只須解

$$\min[\tilde{u}u]\begin{bmatrix}0\\ b\end{bmatrix};\ y\geqslant 0,\ \sum y_j=1,\ yC\geqslant c,\ [\tilde{u}u]\begin{bmatrix}-I\\ B\end{bmatrix}=yA,\ [\tilde{u}u]\geqslant 0.$$

## §12 产业关連規划模型

一直到此，約束向量和評价向量都是作为給定考虑的。当其中有不确定的因素时，以适当的形式考虑平均需要(§9)或是放弃最大化的原則，而采用最大最小的原則来处理。本节将对在約束向量和評价向量的不同情况下，計算最优解，并且确定条件与最优解之間的关系。因为根据条件参数使其連續地变化，所以称为参数規划。这与条件的修正用同样的方法，但是与特定条件的变化相比較，它更强調在条件与最优解之間建立对应。

用簡单的經济計划模型来作为例子。至于选擇什么样类型的經济模型也有种种的見解，而且即使有了决定，約束向量和評价向量也很难唯一地确定。經济計划的主体可以說是几个团体的集合，因此目标函数的系数很少会从一开始就妥当地确定下来。再者，約束向量虽是在为了应用綫性規划时而作为約束看待，但是也有不少情况可以参考目标函数的水平而作一定程度的变动。这样，作为参数規划，对应种种的条件而各自作出暫时的最优規划，然后将这些規划全都用数量加以表示，至于再在其中决定那一个

表 12.1

a 技术系数($A$)

| | I | II | III |
|---|---|---|---|
| I | 0.1 | 0.1 | 0.1 |
| II | 0.1 | 0.5 | 0.3 |
| III | 0.1 | 0.2 | 0.2 |

b 产业活动($I-A$)

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|
| I | 0.9 | −0.1 | −0.1 |
| II | −0.1 | 0.5 | −0.3 |
| III | −0.1 | −0.2 | 0.8 |

c 逆矩陣$(I-A)^{-1}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| I | 1.18 | 0.35 | 0.27 |
| II | 0.38 | 2.47 | 0.97 |
| III | 0.24 | 0.60 | 1.52 |

則有待于在更高水平上的綜合判断。在这里，綫性規划可以說是用来作为最后决定的准备。

現在先說明三种产业的 Leontieff 模型。第1，第2，第3三种产业大体上分别对应着农，工和服务业的。技术系数在表12.1a中由 $A$ 給出。例如为了1单位产品Ⅰ就需要0.1的Ⅰ，0.1的Ⅱ，0.1的Ⅲ. 考虑到每一产业的产品将为各种产业的产品所需要，$(I-A)$ 就是各种产业的活动。例如，产出1单位的Ⅰ就可在Ⅰ产业中使用0.1，而将0.9調到其他的产业里去。与此同时却需要从Ⅱ，Ⅲ来投入 −0.1，−0.1. 为了区別产出与投入，在活动的系数上加以＋与－的符号。在自己产业内未使用的部分中，有的投入其他产业而为其产出起作用，有的脱离开生产过程而到最終需要去。如此，設各种产业的产出水平为 $x$，最終需要为 $F$，則

$$(I-A)x=F, \tag{12.1}$$

或对 $x$ 求解，則得

$$x=(I-A)^{-1}F. \tag{12.2}$$

現在对于各种产业的1单位产品所需要的資本量以向量 $k$ 給出，則对 $x$ 的产出必要的資本量可由內积

$$kx=k(I-A)^{-1}F \tag{12.3}$$

表示。在这个模型中不許可有活动的选擇，問題只是根据最終需要如何决定它的水平。这是由(12.2)給出的。并且所关心的量，

例如投資量与最終需要的关系是由(12.3)給出。在各个情况中起重要作用的 $(I-A)^{-1}$, $k(I-A)^{-1}$ 分别称为逆矩陣表和准逆矩陣表,是表示最終需要与 $x$, $kx$ 的关系的系数。

**例** 給出表 12.2, 則

$x=(14.5\ 47.0\ 33.6)$, $kx=31.1$, $k(I-A)^{-1}=(0.44\ 0.78\ 1.22)$.

表 12.2 資本系数与最終需要

a

| | I | II | III |
|---|---|---|---|
| 資本系数 $k$ | 0.2 | 0.1 | 0.7 |
| 最終需要 $F$ | 5 | 12 | 16 |

b

| | I | II | III |
|---|---|---|---|
| $k_1$ | 0.3 | 0.1 | 0.3 |
| $F_1$ | 1 | 7 | 2 |

現在如果 $F$ 的值增加几倍，立即可以計算出資本的需要量。当发生 $F+\theta F_1$ 或 $k+\lambda k_1$ 这样的变化时,也容易計算。

但在經济計划模型中,活动是容許选擇的,并且是作为綫性規划問題而定式化的,因此,对于条件的变化有必要应用参数规划。

若在上述活动之外导入貿易的活动,就給与选擇的可能性(文献[16]中的 Chenery 論文及文献[15])。

就是,从供給的方面看有国内生产与輸入,在需要的方面有最終需要(除去輸出)与輸出。但是輸出总起来也可看作是产出外汇的产业。輸入是投入外汇,进行各个的产出,而Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ的产出并不需要外汇。即若用輸入价格 $p_m$ 与輸出价格 $p_e$ 作輸出入的活动,則得 $\begin{bmatrix} -I & I \\ p_e & -p_m \end{bmatrix}$。例如輸出1单位的Ⅰ,則增加 $p_{e_1}$ 的外汇,但是分配到最終需要的部分就相应的减少。現設国内生产水平为 $x$, 輸出水平为 $e$, 輸入水平为 $m$, 并且外汇至少要有 $b=1$ 单位的黑字作为条件,則計划模型如下:

$$\begin{bmatrix} (I-A) & -I & I \\ 0 & p_e & -p_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ e \\ m \end{bmatrix} \geqq \begin{bmatrix} F \\ b \end{bmatrix}, \ \min kx;\ x,\ e,\ m \geqq 0. \quad (12.4)$$

并且要使这时的必要投資量为最小。但在下表的数值例中不容許有产业Ⅰ的輸入，并且輸出至少为1单位，即

$$e_1 \geqslant 1,\ m_1 = 0. \tag{12.5}$$

当然輸出入活动直接不需要投資。但是通过經济整体的机构对投資量起影响。并且 $F$, $b$, $k$ 等的系数設为边际值。就是說，在这个模型中目的是投資的有效分配，由此而生变化的只設为与最終需要的增加等相应的部分，而避免急剧的經济构造的变化。

表12.3的結果是国内生产 $x=(15.82\ \ 48.35\ \ 34.07)$，輸出 $e=(1.00\ \ 0.37\ \ 0)$，沒有輸入，这时的最小投資量是31.85。現将对应 $x_1$, $e_1$, $x_2$, $e_2$, $x_3$ 的活动总起来以 $B$ 表示，則 $B^{-1}$ 除最后1列外是非負的（这只需看表12.3b中对应松弛变数 $y$ 的部分，但需要注意最初 $y$ 的活动不形成正的单位矩陣这一点）。因此，若乘 $B^{-1}$ 以 $\begin{bmatrix} F \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \geqslant 0$，則必有 $B^{-1}\begin{bmatrix} F \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \geqslant 0$ 成立。

就是可以說，不論怎样增大最終需要与外汇的限制，只進行Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ的国内生产与Ⅰ，Ⅱ的輸出的产业的构造不变。这样，例如約束向量以 $\theta[1\ \ 7\ \ 2\ \ 0\ \ 0]$ 增加时，各个水平增加多少的問題只需計算

$$B^{-1}\theta\begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \theta B^{-1}\begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

并且从 $B^{-1}$ 的形式知不增加輸出，只变动最終需要的水平（表12.3b; 12.4a）。

最終需要作如下的分割，考虑各个不同的变化

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 12 \\ 16 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\theta + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\theta_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\theta_2.$$

## 表12.3 原始数据与最終单純形表

a

| $v_j$ | λ | -0.3 | -0.1 | -0.8 | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | -0.2 | -0.1 | 0.7 | | | | | | | | | | |
| | s | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $m_2$ | $m_3$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ |
| | 5 | 0.9 | -0.1 | -0.1 | -1 | | | | | -1 | | | | |
| | 12 | -0.1 | 0.5 | -0.3 | | -1 | | 1 | | | -1 | | | |
| | 16 | 0.1 | -0.2 | 0.8 | | | -1 | | 1 | | | -1 | | |
| | 1 | | | | 0.7 | 0.8 | 0.9 | -1.4 | -1.9 | | | | -1 | |
| | 1 | | | | 1 | | | | | | | | | -1 |

b

| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $m_2$ | $m_3$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 15.82 | 1 | | | | | 0.11 | -0.26 | -0.55 | -1.18 | -0.35 | -0.28 | -0.43 | 0.88 |
| $e_1$ | 1.00 | | | | 1 | | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1.00 |
| $x_2$ | 48.35 | | 1 | | | | 1.80 | -1.86 | -4.88 | -0.38 | -2.47 | -0.97 | -3.08 | -1.78 |
| $e_2$ | 0.37 | | | | | 1 | 1.13 | -1.75 | -2.38 | 0 | 0 | 0 | -1.25 | -0.88 |
| $x_3$ | 34.07 | | | 1 | | | -0.79 | -0.49 | -0.04 | -0.24 | -0.66 | -1.53 | -0.82 | -0.33 |
| $z_j - c_j$ 1 | -31.85 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.35 | 0.58 | 0.63 | 0.44 | 0.78 | 1.22 | 0.97 | 0.24 |
| $z_j - c_j$ λ | -19.80 | | | | | | 0.02 | 0.41 | 0.66 | 0.47 | 0.55 | 0.04 | 0.69 | 0.01 |
| λ的范圍(不使基本解起变化) | | | | | | | -15.8≤ | -1.42≤ | -0.94≤ | -0.96≤ | -1.42≤ | -1.91≤ | -1.42≤ | -16.18≤ |

# 表 12.4

## a 約束向量变化的部分計算

| | 基本解不变化的范圍 | | | $B^{-1}f$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\theta_2$ | $\theta_1$ | $\theta$ | $\theta_2$ | $\theta_1$ | $\theta$ |
| $x_1$ | $-18.04\leqslant$ | $-36.48\leqslant$ | $-3.80\leqslant$ | 0.88 | 0.43 | 4.16 |
| $e_1$ | $-1.00\leqslant$ | $\leqslant\infty$ | $\leqslant\infty$ | 1.00 | 0 | 0 |
| $x_2$ | $\leqslant 27.23$ | $-15.70\leqslant$ | $-2.47$ | $-1.78$ | 3.08 | 19.58 |
| $e_2$ | $\leqslant 0.43$ | $-0.30\leqslant$ | $\leqslant\infty$ | $-0.88$ | 1.25 | 0 |
| $x_3$ | $\leqslant 101$ | $-41.31\leqslant$ | $-4.38\leqslant$ | $-0.33$ | 0.32 | 7.92 |

## b 整理結果

| 变化 | | $\theta$ 的增加 | $\theta_1$的增加 | $\theta_2$的增加$\leqslant 0.43$ | $0.43\leqslant\theta_2\leqslant 106.5$ | | $106.5\leqslant\theta_2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 采用活动与水平 | $x_1$ | $15.82+4.16\theta$ | $15.82+0.43\theta_1$ | $15.82+0.88\theta_2$ | $x_1$ | $15.73+1.08\theta_2$ | $x_1$ | 130.57 |
| | $e_1$ | 1.00 | 1.00 | $1.00+\theta_2$ | $e_1$ | $1.00+\theta_2$ | $e_1$ | 107.50 |
| | $x_2$ | $48.35+19.58\theta$ | $48.35+3.08\theta_1$ | $48.35-1.78\theta_2$ | $x_2$ | $47.58+0.02\theta_2$ | $x_2$ | 50.13 |
| | $e_2$ | 0.37 | $0.37+1.25\theta_1$ | $0.37-0.88\theta_2$ | $m_3$ | $-0.16+0.37\theta_2$ | $m_3$ | 39.09 |
| | $x_3$ | $34.07+7.92\theta$ | $34.07+0.82\theta_1$ | $34.07-0.33\theta_2$ | $x_3$ | $34.06-0.32\theta_2$ | $y_5$ | $-106.5+\theta_2$ |
| 投資量 | | $31.85+8.33\theta$ | $21.85+0.97\theta_1$ | $31.85-0.24\theta_2$ | $31.75-0.01\theta_2$ | | 31.12 | |

下面看一看当約束向量发生变化时，发現基本活动产生交替点的方法。現設发生了 $f$ 的变化，則由此所起的各个活动的采用水平的变化是 $B^{-1}f$。因此，即使由于 $\mu f$, $\mu\geqslant 0$ 的变化而不使产生基本活动的交替的条件是活动的采用水平不因 $\mu B^{-1}f$ 的变化而成負的。这样的边际点是在采用水平的任何一个恰成为 0 时求出。若 $B^{-1}f$ 已計算出来，只对其中的負的除以对应的 $B^{-1}s$，以其絕对值的最小的为 $\mu$，則 $\mu$ 表示边际点，与此对应的活动在下一阶段由基本解給出。就 $f=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$ 的例子說，$\mu=0.43$ 时得到 $e_2$（表 12.4）。其次，对 $e_2$ 行用与对偶法相同的准則檢查，$\mu$ 即使超出边际点，也会暫时还滿足最优的条件。就是說，即使增加 $\mu$，$z_j-v_j\geqslant 0$ 并不变化，而在 $B^{-1}(s+\mu f)$ 中，任何一个若少許成为負的，則利用对偶法立刻可以轉移到最优的状态，为此，只須用 $m_8$ 代替 $e_2$。

［注］ $f=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$ 时，$B^{-1}f$ 从表 12.3 立即查出，取負的与 $B^{-1}s$ 作比，則对 $x_2$, $e_2$, $x_3$ 得 $\dfrac{48.35}{-1.78}$, $\dfrac{0.37}{-0.88}$, $\dfrac{34.07}{-0.33}$，絕对值最小的是 0.43，对应于 $e_2$。

其次，在 $0.43\leqslant\theta_2\leqslant 106.5$ 范圍內的計算，是从表 12.3 将 $e_2$ 取出而引进 $m_8$ 的情况，$106.5\leqslant\theta_2$ 时更以 $y_5$ 代 $x_3$，由此作出对应的单純形表（表 12.5）。对此与表 12.3 的情况同样計算参数的可能变化范圍，則可作出表 12.4 的后一部分与表 12.6。

表 12.5 条件变化时的单純形表

| | | $v_j$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $m_2$ | $m_3$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\lambda$ | −0.3 | −0.1 | −0.3 | | | | | | | | | | |
| | | 1 | −0.2 | −0.1 | −0.7 | | | | | | | | | | |
| | | $s$ | | | | | | | | | | | | | |
| $x_1$ | | 15.73 | 1 | | | | −0.23 | −0.15 | −0.14 | | −1.18 | −0.35 | −0.28 | −0.15 | 1.08 |
| $e_1$ | | 1.00 | | | | 1 | 0 | 0 | 0 | | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $x_2$ | | 47.58 | | 1 | | | −2.06 | −0.51 | 1.75 | | −0.38 | −2.47 | −0.97 | −0.51 | 0.02 |
| $m_3$ | | −0.16 | | | | | −0.42 | −0.47 | 0.74 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0.53 | 0.37 |
| $x_3$ | | 34.06 | | | 1 | | −0.02 | −0.80 | −0.47 | | −0.24 | −0.66 | −1.53 | −0.80 | −0.32 |
| $z_j-v_j$ | 1 | −31.75 | | | | | 0.26 | 0.64 | 0.12 | | 0.44 | 0.78 | 1.22 | 0.44 | 0.01 |
| | $\lambda$ | −19.69 | | | | | 0.28 | 0.34 | −0.08 | | 0.47 | 0.55 | 0.64 | 0.34 | −0.23 |
| $x_1$ | | 130.57 | 1 | | 3.37 | | −0.29 | −2.86 | −1.43 | | −2.00 | −2.57 | −5.43 | −2.86 | |
| $e_1$ | | 107.50 | | | 3.13 | 1 | −0.05 | −2.51 | −1.46 | | −0.76 | −2.06 | −4.78 | −2.51 | |
| $x_2$ | | 50.13 | | 1 | 0.07 | | −2.06 | −0.57 | 1.71 | | −0.40 | −2.51 | −1.09 | −0.57 | |
| $m_3$ | | 39.09 | | | 1.15 | | −0.44 | −1.40 | 0.20 | 1 | −0.28 | −0.76 | −1.76 | −0.40 | |
| $y_5$ | | 106.50 | | | −3.13 | | 0.05 | 2.51 | 1.46 | | 0.76 | 2.06 | 4.78 | 2.51 | 1 |
| $z_j-v_j$ | 1 | −31.12 | | | 0.02 | | 0.26 | 0.63 | 0.11 | | 0.44 | 0.77 | 1.19 | 0.63 | |
| | $\lambda$ | −44.18 | | | −0.72 | | 0.29 | 0.91 | 0.26 | | 0.64 | 1.02 | 1.74 | 0.91 | |
| $x_1$ | | 16.19 | 1 | | | | 1.00 | 1.24 | −2.01 | −2.93 | −1.18 | −0.35 | −0.28 | −1.69 | |
| $e_1$ | | 1.42 | | | | 1 | 1.14 | 1.29 | −2.00 | −2.71 | 0 | 0 | 0 | −1.43 | |
| $x_2$ | | 47.59 | | 1 | | | −2.03 | −0.48 | 1.70 | −0.06 | −0.38 | −2.47 | −0.97 | −0.55 | |
| $y_5$ | | 8.58 | | | | | −1.14 | −1.29 | 2.00 | 2.71 | 0 | 0 | 0 | 1.43 | 1 |
| $x_3$ | | 33.92 | | | 1 | | −0.38 | −1.22 | 0.17 | 0.87 | −0.24 | −0.66 | −1.53 | −0.35 | |
| $z_j-v_j$ | 1 | −31.75 | | | | | 0.27 | 0.65 | 0.11 | −0.02 | 0.44 | 0.78 | 1.22 | 0.63 | |
| | $\lambda$ | −19.79 | | | | | 0.02 | 0.04 | 0.38 | 0.62 | 0.47 | 0.55 | 0.64 | 0.66 | |

## 表 12.6 $\theta_2=9$ 时其他变化的影响

a　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　b

| | 約束向量的变化 | | | | | | 評价向量的变化 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $-2.44\leq\theta$ | | $6.00\leq\theta_1$ | | $-38.78\leq\theta_1\leq 6.00$ | | $-0.94\leq\lambda\leq 0.03$ | | $0.03\leq\lambda$ | |
| 采用活动与水平 | $x_1$ | $25.44+4.16\theta$ | $x_1$ | $23.71+0.43\theta_1$ | $x_1$ | $25.44+0.15\theta_1$ | $x_1$ | 25.44 | $x_1$ | 16.19 |
| | $e_1$ | 10.00 | $e_1$ | 10.00 | $e_1$ | 10.00 | $e_1$ | 10.00 | $e_1$ | 1.42 |
| | $x_2$ | $47.80+19.58\theta$ | $x_2$ | $32.37+3.08\theta_1$ | $x_2$ | $47.80+0.51\theta_1$ | $x_2$ | 47.80 | $x_2$ | 47.59 |
| | $m_3$ | 3.16 | $e_2$ | $-7.50+1.25\theta_1$ | $m_3$ | $3.16-0.53\theta_1$ | $m_3$ | 3.16 | $y_5$ | 8.58 |
| | $x_3$ | $31.18+7.92\theta$ | $x_3$ | $31.06+0.82\theta_1$ | $x_3$ | $31.18+0.80\theta_1$ | $x_3$ | 31.18 | $x_3$ | 33.92 |
| | $31.70+3.33\theta$ | | $29.72+0.97\theta_1$ | | $31.70+0.64\theta_1$ | | $31.70+21.76\lambda$ | | $31.75+19.79\lambda$ | |

同样操作对 $\theta_2=9$ 时 $\theta$ 与 $\theta_1$ 的变化加以整理，則如表 12.6。表中

$$\text{約束向量:}\begin{bmatrix}5\\12\\16\\1\\10\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\7\\2\\0\\0\end{bmatrix}\theta+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix}\theta_1$$

資本系数向量：$(0.2+0.3\lambda,\ 0.1+0.1\lambda,\ 0.7+0.3\lambda)$。

再来看一看評价向量的資本系数变化成为 $(0.2\ 0.1\ 0.7)+\lambda(0.3\ 0.1\ 0.3)$ 的情况。在最初的約束向量的状态中，为了改变 $\lambda$，先看評价向量 $(-0.3\ -0.1\ -0.3)$ 的 $z_j-v_j$，則由表 12.3 b 知，不在基本解內的活动都是正的。因此不管使 $\lambda$ 取多大的正值，直到現在是非負的 $z_j-v_j$ 也不会发生变化。就是說，在这里考慮的模型中，資本系数的增加不会带来輸入。若 $\lambda$ 取負值，資本系数减少时就作相反的考慮，以 $\lambda$ 行中的正的 $z_j-v_j$ 除原来的 $z_j-v_j$，其中最小的表示边际点，与此对应的活动在下一步換进来。就是若超过边际点 $-0.94$，則对应 $m_3$ 的 $z_j-v_j$ 成为負的，因而被采用，这不外乎是单純形法的应用。利用表 12.5 求出 $\theta_2=9$ 时評价向量的变化結果則如表 12.6 b，$\lambda$ 大因而資本系数大时沒有輸入，$\lambda$ 接近 0 时进行 $m_3$ 的輸入。$\lambda$ 接近 0 时产业面的資本系数差大，由于此事利用貿易节約資本是可能的。$\lambda$ 大則利用貿易的节約資本就不可能，这可认为不过是为了确保外汇的条件进行輸出。这样就可以确立参数变化的所与条件与对应的最优解之間的关系。

# 后記

前二章是由森口、后一章是由宮下写的。从决定合写到交稿，日期非常短，因此彼此几乎完全沒有联系。在記号与其他地方有不統一处，希望原諒。

在第1章，力求自然地說明所謂单純形法的原理。在第2章，闡述了稍为高級的处理方法。一个問題得到解以后的考察或研究是很重要的。这事虽然不限于綫性規划的問題，但是在綫性規划問題上特別有实用上的巨大意义。整个第1、2章的处理中不多使用矩陣計算。向量这一詞的意义，覺得象§5的补注那样說明就可以。然而因为有第3章以及与其他文献的联系，所以也不一定拘于这个解释。

在第3章，象在这一章一开始所說的，考虑了問題的設定与它的解法。并且特別叙述了几个处理不确定因素的方法。在与基底解同样的意义上采取了基本解这一用語。这也就那样了。再就是，說到凸多面体对博奕的凸多面体也用作含有不是有界的情况。对于記号，在經济学的习惯用法与綫性規划的习惯用法不同时，沒有一定使其一致。

森口繁一

宮下藤太郎

1958年5月20日

# 参 考 文 献


[1] T. C. Koopmans (ed.): Activity Analysis of Production and Allocation, Cowles Commission Monograph No. 13 (Wiley, 1951), 404 pp.

[2] R. Dorfman: Application of Linear Programming to the Theory of the Firm (University of California Press, 1951), 98 pp.; 小宮譯: リニヤー・プログラミング(日本規格協会, 1955), 225 pp.

[3] A. Charnes, W. Coorer and A. Henderson: An Introduction to Linear Programming (Wiley, 1953), 74 pp.

[4] H. W. Kuhn and A. W. Tucker (ed.): Linear Inequalities and Related Systems, Annals of Mathematics Studies No. 38 (Princeton University Press, 1956). 322 pp.

[5] A. Orden and L. Goldstein (ed.): Symposium on Linear Inequalities and Programming, Project SCOOP. 1 April 1952 (Planning Research Division, Comptroller, Hdqs., U. S. Air Force).

[6] Proceedings of the Second Symposium in Linear Programming, National Bureau of Standards (Jan. 1955), 685 pp.

[7] 河部守弘: リニヤー・プログラミングによる 經営計画 (产业图书出版, 1956), 268 pp.

[8] 加藤二郎,管波三郎: 実务家 のためのリニヤー・プログラミング(誠信书房, 1956), 120 pp.

[9] 山田雄三,久武雅夫編:經済分析 シンポジウム 1, 經济活动分析(日本評論新社, 1957), 126 pp.

[10] 森口繁一:線型計画法入門(日本科學技术連盟, 1957), 161 pp.

[11] 石田武雄, 前田浩郎: やさしいリニアー・プログラミング(ダイヤモンド社, 1958), 199 pp.

[12] 横山保: 企业經营と線型計画 (大阪大学經济学部社会經济研究室, 1957), 136 pp.

[13] A. S. Manne: Scheduling of Petroleum Refinery Operation (Harvard University Press, 1956), 185 pp.

[14] 稻田献一: リニア・プログラミングの理論と应用(ダイヤモンド社, 1957).

[15] 古谷弘:現代經济学(弘文堂, 1957), 247 pp.

[16] T. Barna (ed.): The Structural Interdependence of the Economy

(Wiley, 1954), 429 pp.

[17] A. R. Ferguson and G. B. Dantzig: The Allocation of Aircraft to Routes—An Example of Linear Programming under Uncertain Demand, Management Science, 3, No. 1, 1956 Oct, 45～73.

# 校 后 記

許 国 志

这本小册子确实在短短五、六万字中，引进了不少的材料。但亦由于篇幅的限制，因此有些証明就不得不省略，而仅仅利用数值例来加以說明。

书中第1章、第2章以及第3章中的部分內容(§8运輸問題)都是典型的綫性規划的內容。第3章与其說是应用(原书标題如此)，无宁說是綫性規划的重要組成部分。其中有些問題的討論还是較有兴趣的，例如§11利用最大最小原則的生产規划。§10博奕論与綫性規划一节，也較一般綫性規划书中引进了較新穎的材料。

綫性規划中的一个中心內容就是对偶理論。本书由于篇幅关系，不能詳加討論，这是可以理解的。但是如果在适当的地方加以解釋，将会是有益的。

这本小册子可以作为初学綫性規划的人們的补充、复习讀物。一般讀者也可以从中了解到一些綫性規划的內容。有兴趣的讀者可参讀下列著作：

1. 中国科学院数学研究所运筹学研究室編：綫性規划的理論及应用，人民教育出版社(1959)。

2. Л. В. 康特洛維奇：生产組織与計划中的数学方法，中国科学院力学研究所运筹学室譯，科学出版社(1959)。

3. S. 梵达：博奕論与綫性規划，南开大学数学系綫性規划小組譯，人民教育出版社(1960)。